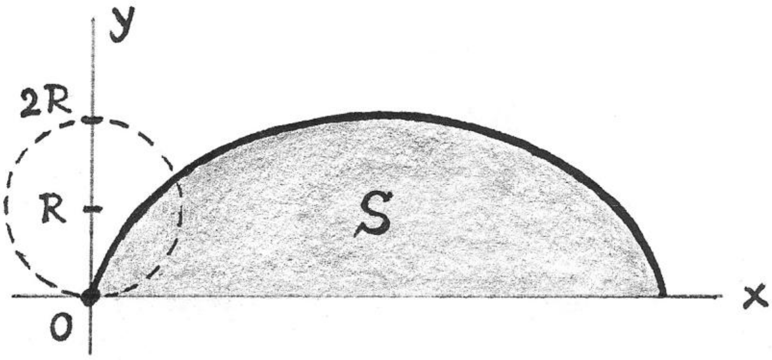
Πραγματική Ανάλυση IV

Άσκηση για το Πάσχα 2017



Στη φετινή Άσκηση για το Πάσχα θεωρούμε την «Ωραία Ελένη των Γεωμετρών», την **κυκλοειδή** καμπύλη που συναντήσαμε και στο μάθημα:

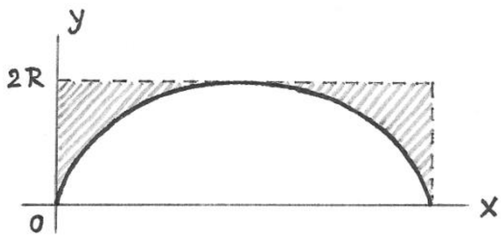
$$\vec{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rt - R\sin t \\ R - R\cos t \end{pmatrix} \qquad \text{για} \qquad 0 < t < 2\pi.$$

Από τις αναρίθμητες όμορφες και σημαντικές ιδιότητές της, εδώ θα επικεντρωθούμε στο εμβαδόν του χωρίου S ανάμεσα στην κυκλοειδή και τον οριζόντιο άξονα (βλ. το παραπάνω σχήμα). Ο Γαλιλαίος το 1599 αποπειράθηκε να μετρήσει το εν λόγω εμβαδόν κατασκευάζοντας μεταλλικά φύλλα σε κυκλοειδές σχήμα καθώς και φύλλα στο σχήμα του γενετήριου κύκλου ακτίνας R. Συγκρίνοντας το βάρος τους, βρήκε ότι η κυκλοειδής καταλαμβάνει «περίπου το τριπλάσιο εμβαδόν του κύκλου» και σταμάτησε εκεί πιστεύοντας ότι ο λόγος 1:3 ήταν απλώς μια προσέγγιση. Με τα μέσα που διαθέτει ένας σημερινός φοιτητής της ΠΑ IV, μπορεί να αποδείξει ότι ο λόγος των εμβαδών είναι *ακριβώς* 1:3.

(α) Να διερευνήσετε την πλούσια ιστορία της κυκλοειδούς καμπύλης και των εφαρμογών της και να γράψετε μια σύντομη παράγραφο για το θέμα αυτό.

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $\iint_S dy\,dx$ ισούται με $3\pi R^2$.

(γ) Να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω αποτέλεσμα για να βρείτε και το εμβαδόν της σκιαγραφημένης περιοχής που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Η εργασία αποσκοπεί στη δική σας εξάσκηση και αναψυχή. Όποιος επιθυμεί διόρθωση και εκτίμηση της δουλειάς του μπορεί να την παραδώσει στον Ι.-Π. βαν ντερ Βέιλε ή Δ. Ραζή μέχρι την Παρασκευή 28 Απριλίου 2017.

Καλή Διασκέδαση και Καλό Πάσχα !