ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ$*$ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ $*$ ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι 1-2-17

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

1. Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μια (τυχαία) καμπύλη. Αποδείξτε ότι το πλαίσιο Frenet $\{T(t), N(t), B(t)\}$ σε ένα τυχαίο σημείο $\gamma(t)$ δίνεται από τα διανύσματα

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}, \quad N(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \times \gamma'(t)}{||\gamma'(t) \times \gamma''(t)|| \cdot ||\gamma'(t)||}, \quad B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{||\gamma'(t) \times \gamma''(t)||}.$$

(T, N, B είναι τα διανύσματα, εφαπτόμενο, πρώτης και δεύτερης κάθετης αντίστοιχα). **[30]**

2. Βρείτε μια αναπαραμέτρηση ως προς το μήκος τόξου της καμπύλης

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

[10]

3. **(α)** Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση στο ανοικτό U και έστω $c \in \mathbb{R}$. Γράψτε μια συνθήκη ώστε το σύνολο $M = f^{-1}(c)$ να είναι μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. **[5]**

(β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x + y + z - 1}, \qquad g(x, y, z) = xyz^2.$$

Για ποιές τιμές του $c \in \mathbb{R}$ είναι τα σύνολα $f^{-1}(c)$ και $g^{-1}(c)$ κανονικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$; **[10]**

4. Έστω M η μοναδιαία σφαίρα αφαιρώντας τον βόρειο και νότιο πόλο και με παραμέτρηση (του Mercator)

$$X(u, v) = (\mathrm{sech} u \cos v, \mathrm{sech} u \sin v, \tanh u) = \left(\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \frac{\sinh u}{\cosh u} \right).$$

Δείξτε ότι η X είναι μια σύμμορφη παραμέτρηση, δηλ. ισχύει $ds^2 = f(u, v)(du^2 + dv^2)$, για κάποια διαφορίσιμη συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$. **[20]**

5. **(α)** Έστω $M = \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in U\}$ κανονική επιφάνεια που δίνεται ως γράφημα της διαφορίσιμης συνάρτησης $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (U ανοικτό). Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss και τη μέση καμπυλότητα της M στο σημείο $p = (x_0, y_0, h(x_0, y_0))$, όπου (x_0, y_0) είναι ένα κρίσιμο σημείο της h (δηλ. $h_x(x_0, y_0) = h_y(x_0, y_0) = 0$). **[20]**

(β) Αποδείξτε ότι αν $K(p) > 0$ τότε το σημείο (x_0, y_0) είναι τοπικό ακρότατο της h και αν $K(p) < 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι ομφαλικό σημείο της h. **[5]**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!