ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Εξέταση Χειμερινού Εξαμήνου 2016-2017

Θέμα 1 (1 μονάδα). Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \cos\left(\ln\left(x^2+1\right)\right) & , \text{ αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{ αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αλλά όχι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Λύση. Έστω $a \in [0,1]$. Αν $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ρητών στο $[0,1]$ η οποία συγκλίνει στο a, τότε

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(3 + \cos\left(\ln\left({a_n}^2+1\right)\right)\right) = 3 + \cos\left(\ln\left(a^2+1\right)\right) \geq 3 - 1 = 2.$$

Αν $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία αρρήτων στο $[0,1]$ η οποία συγκλίνει στο a, τότε $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Επομένως το $\lim_{x\to a} f(x)$ δεν υπάρχει. Συνεπώς το σύνολο σημείων ασυνέχειας της f είναι το $[0,1]$, του οποίου το μέτρο δεν είναι 0. Άρα, από το θεώρημα Lebesgue, η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Από την άλλη, αφού το μέτρο του αριθμήσιμου συνόλου $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ισούται με 0, έπεται ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$, άρα η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Θέμα 2 (1.5 μονάδα).

(α) Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Έστω B το σύνολο των πραγματικών αριθμών οι οποίοι ανήκουν σε ακριβώς ένα από τα υποσύνολα A_n. Δείξτε ότι το B είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(β) Έστω C το σύνολο Cantor και A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο. Δείξτε ότι το το $A \setminus C$ δεν ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}$.

(γ) Έστω X υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{P}(X)$ η σ-άλγεβρα των υποσυνόλων του X. Για $A \in \mathcal{P}(X)$ ορίζουμε

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } A \text{ το πολύ αριθμήσιμο} \\ +\infty & , \text{ αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases}$$

Δείξτε ότι το μ είναι μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{P}(X))$.

Λύση.

(α) Για κάθε n, το σύνολο $\bigcup_{k\neq n} A_k$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, ως αριθμήσιμη ένωση Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. Επομένως και το σύνολο $B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k\neq n} A_k\right)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, ως συμπλήρωμα Lebesgue μετρήσιμου συνόλου σε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Άρα, το

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

είναι επίσης Lebesgue μετρήσιμο, ως αριθμήσιμη ένωση Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

(β) Αν το $A \setminus C$ ανήκε στην Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}$, τότε θα ήταν Lebesgue μετρήσιμο. Επειδή, το C είναι Lebesgue μετρήσιμο, έπεται ότι το ίδιο θα ίσχυε και για το $A = (A \setminus C) \bigcup C$, άτοπο.

(γ) Προφανώς, $\mu(\emptyset) = 0$, άρα αρκεί να αποδείξουμε την σ-προσθετικότητα του μ. Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων του $\mathcal{P}(X)$. Θεωρούμε την ένωση $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Αν κάθε A_n είναι το πολύ αριθμήσιμο, τότε το ίδιο ισχύει και για το A, άρα

$$\mu(A) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Αν κάποιο από τα A_n, έστω το A_m, είναι υπεραριθμήσιμο, τότε το ίδιο ισχύει και για το A, άρα

$$\mu(A) = \infty = \infty + \sum_{n\neq m} \mu(A_n) = \mu(A_m) + \sum_{n\neq m} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Θέμα 3 (1 μονάδα). Έστω $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.
(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.
(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Λύση.
(α) Για $a \in (-\infty, 0]$, το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}\colon \frac{1}{f(x)} > a\}$ ισούται με $\mathbb{R}$, το οποίο είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έστω τώρα $a \in (0,\infty)$. Η ανισότητα $\frac{1}{f(x)} > a$ είναι ισοδύναμη με την ανισότητα $f(x) < \frac{1}{a}$. Επειδή το σύνολο $f^{-1}\left(0, \frac{1}{a}\right)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο (λόγω μετρησιμότητας της f), έπεται ότι το ίδιο ισχύει και για το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}\colon \frac{1}{f(x)} > a\}$. Άρα, η $\frac{1}{f}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.
(β) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η συνέχεια της g συνεπάγεται ότι το σύνολο $g^{-1}((a,\infty))$ είναι ανοικτό, επομένως γράφεται ως $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, όπου τα I_n είναι ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα. Άρα, αφού η f είναι Lebesgue μετρήσιμη, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$(g \circ f)^{-1}((a,\infty)) = f^{-1}\left(g^{-1}((a,\infty))\right) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n),$$

είναι Lebesgue μετρήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. Άρα, η $g \circ f$ είναι Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση.

Θέμα 4 (1 μονάδα). Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, έστω $g_n\colon A \to [0,\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\int_A g_n = 2 + (-1)^n \frac{n+1}{n}.$$

Έστω $g = \liminf g_n$. Δείξτε ότι $\int_A g \leq 1$.

Λύση. Από το Λήμμα Fatou, έχουμε ότι

$$\int_A g \leq \liminf \int_A g_n = 2 + \liminf\, (-1)^n \frac{n+1}{n} = 2 - 1 = 1.$$

Θέμα 5 (1 μονάδα). Να υπολογιστεί το

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[n]{e^{-x^2}}}{1+x^2}\, dx.$$

Λύση. Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{\sqrt[n]{e^{-x^2}}}{1+x^2}$, συγκλίνει σημειακά στη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Προφανώς, $|f_n(x)| \leq f(x)$, για κάθε n και για κάθε x. Επίσης, οι συναρτήσεις f_n και f είναι συνεχείς στο $[-1,1]$, άρα Riemann ολοκληρώσιμες στο $[-1,1]$, άρα Lebesgue ολοκληρώσιμες στο $[-1,1]$. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[n]{e^{-x^2}}}{1+x^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\, dx = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \arctan(x)\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$

Θέμα 6 (1 μονάδα). Να υπολογιστεί το

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(1 - \sin\left(x^2\right)\right)^n \sin\left(x^2\right) dx.$$

Λύση. Θεωρούμε την ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συνεχών συναρτήσεων με τύπο $f_n(x) = \left(1 - \sin\left(x^2\right)\right)^n \sin\left(x^2\right)$ στο ανοικτό διάστημα $I = \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$. Οι f_n είναι μη αρνητικές και Lebesgue ολοκληρώσιμες στο I. Από το Θεώρημα Beppo Levi (ή, εναλλακτικά, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης), έπεται ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(1 - \sin\left(x^2\right)\right)^n \sin\left(x^2\right) dx = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \sin\left(x^2\right)\right)^n \sin\left(x^2\right) dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{\sin\left(x^2\right)}{1 - \left(1 - \sin\left(x^2\right)\right)} \, dx = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Θέμα 7 (1.5 μονάδα). Δίνεται η συνάρτηση $f : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , \text{ αν } y \leq x \\ -\frac{1}{y^2} & , \text{ αν } x < y \end{cases}$$

Υπολογίστε τα επάλληλα ολοκληρώματα της f στο $(0,1) \times (0,1)$ και δείξτε ότι η f δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,1) \times (0,1)$.

Λύση. Για κάθε y, έχουμε ότι

$$\int_0^1 f(x,y) \, dx = \int_0^y f(x,y) \, dx + \int_y^1 f(x,y) \, dx = -\int_0^y \frac{1}{y^2} \, dx + \int_y^1 \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{y} - 1 + \frac{1}{y} = -1.$$

Άρα,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, dx \, dy = -1.$$

Όμοια, για κάθε x, έχουμε ότι

$$\int_0^1 f(x,y) \, dy = \int_0^x f(x,y) \, dy + \int_x^1 f(x,y) \, dy = \int_0^x \frac{1}{x^2} \, dy - \int_x^1 \frac{1}{y^2} \, dy = \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x} = 1.$$

Άρα,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, dy \, dx = 1.$$

Αφού τα επάλληλα όλοκληρώματα δεν είναι ίσα, το Θεώρημα Fubini συνεπάγεται ότι η f δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,1) \times (0,1)$.

Θέμα 8 (1 μονάδα). Έστω $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση.
(α) Δείξτε ότι το μέτρο Lebesgue του συνόλου $f^{-1}([1,\infty))$ είναι πεπερασμένο.
(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$.

Λύση.
(α) Έστω $A = f^{-1}([1,\infty))$. Προφανώς, $f \geq \chi_A$. Επομένως,

$$m(A) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A \leq \int_{\mathbb{R}} f < \infty.$$

(β) Η ανισότητα $\frac{1}{f(x)} \geq 1$ είναι ισοδύναμη με την ανισότητα $f(x) \leq 1$. Επομένως, αν η $\frac{1}{f}$ ήταν Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε, από το (α), θα είχαμε επίσης ότι $m(f^{-1}(0,1])) < \infty$. Αφού όμως ισχύει ότι $\mathbb{R} = f^{-1}([1,\infty)) \cup f^{-1}((0,1])$, το συμπέρασμα θα ήταν ότι $m(\mathbb{R}) < \infty$, άτοπο.

Θέμα 9 (1 μονάδα). Δείξτε ότι $L^2(\mathbb{R}) \cap L^4(\mathbb{R}) \subseteq L^3(\mathbb{R})$.

Λύση. Έστω $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^4(\mathbb{R})$. Τότε $||f||_2 < \infty$ και $||f||_4 < \infty$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder για $p = q = 2$ (ή, εναλλακτικά, την ανισότητα Cauchy-Schwarz), έπεται ότι

$$||f||_3^3 = \int_{\mathbb{R}} |f|^3 = \int_{\mathbb{R}} |f||f|^2 = ||\ |f|\ f^2\ ||_1 \leq ||f||_2\ ||f^2||_2 = ||f||_2\ ||f||_4{}^2 < \infty.$$

Άρα $f \in L^3(\mathbb{R})$.