Λύσεις Θεμάτων στην Αλγεβρα

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

26 Ιανουαρίου 2017

Θέμα 1: α) Εξετάστε αν είναι ανάγωγα επί του $\mathbb{Q}$ τα πολυώνυμα $x^6 + 30x^5 - 15x^3 + 6x - 120$ και $x^4 - 4x + 4$.

β) Βρείτε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των παρακάτω ζευγών πολυωνύμων στο $\mathbb{Q}[x]$

(i) $x^3 - 6x + 7$ και $x + 4$

(ii) $x^7 - 1$ και $x^7 - x^4 + x - 1$

($\mathbb{Q}$ είναι το σώμα των ρητών αριθμών.)

Λύση: α) Στο πρώτο μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Eisenstein, για $p = 3$. Στο δεύτερο δοκιμάζουμε αν έχει ρητές ρίζες της μορφής $\frac{a}{b}$, με a, b σχετικώς πρώτους. Πρέπει τότε να είναι $a^4 - 4ab^3 + 4b^4 = 0$, δηλαδή $a^4 = 4b^3(a - b)$, που σημαίνει ότι το a διαιρεί το είτε το b (που δε συμβαίνει) ή το $a - b$, άρα πάλι το b, είτε διαιρεί το 4 που πάλι δε μπορεί να συμβεί. Αρα το πολυώνυμο δεν έχει ρητές ρίζες, επομένως και ούτε πρωτοβάθμιους παράγοντες επί του $\mathbb{Q}$. Ελέγχουμε στη συνέχεια αν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο δευτεροβάθμιων παραγόντων με ακέραιους συντελεστές $(ax^2 + bx + c) \cdot (dx^2 + ex + f)$ και ελέγχοντας πάλι τις δυνατότητες διαπιστώνουμε ότι δε συμβαίνει.

β) Εκτελώντας τη διαίρεση του $x^3 - 6x + 7$ με το $x + 4$ βρίσκουμε υπόλοιπο 33 που σημαίνει ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των δύο πολυωνύμων είναι το 1, ενώ για το άλλο ζεύγος παρατηρούμε ότι $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, ενώ $x^7 - x^4 + x - 1 = x^4(x^3 - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1)$, δηλαδή το $x - 1$ είναι κοινός τους παράγοντας ενώ οι λοιποί παράγοντες είναι ανάγωγοι, άρα είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους.

Θέμα 2: α) Εξετάστε αν είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ το σύνολο των στοιχείων της μορφής $(2a, 3b)$ με $a,\ b \in \mathbb{Z}$.

β) Αν A είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος και J είναι ένα ιδεώδες του πολυωνυμικού δακτυλίου $A[x]$, εξετάστε αν το σύνολο

$$I = \{a \in A \mid a \text{ είναι μεγιστοβάθμιος συντελεστής ένος πολυωνύμου του } J\}$$

είναι ιδεώδες του A

Λύση: α) Το σύνολο αυτών των στοιχείων περιέχει το $(0, 0) = (2 \cdot 0, 3 \cdot 0)$, περιέχει τη διαφορά των $(2a, 3b)$ και $(2a', 3b')$, που ισούται με $(2(a - a'), 3(b - b'))$, ενώ τέλος, για κάθε $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, περιέχει το $(u, v) \cdot (2a, 3b) = (2au, 3bv)$. Αρα είναι ιδεώδες.

β) Το 0 ανήκει στο I ως μεγιστοβάθμιος όρος του μηδενικού πολυωνύμου. Εστω ότι το a είναι μεγιστοβάθμιος όρος του $f(x) \in J$ και b είναι μεγιστοβάθμιος όρος του $g(x) \in J$. Αν οι βαθμοί των δύο πολυωνύμων είναι ίσοι τότε το $a - b$ είναι μεγιστοβάμιος όρος της διαφοράς τους, άρα ανήκει στο I. Αν, ας πούμε, ο βαθμός του f είναι m και του g είναι n, με $m > n$, πολλαπλασιάζουμε το g με x^{m-n}, οπότε το γινόμενό τους είναι στο J και το $a - b$ είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του $f(x) - x^{m-n} \cdot g(x) \in J$. Αρα $a - b \in I$. Αν a είναι μεγιστοβάθμιος όρος του $f(x) \in J$ και $b \in A$, τότε ba είναι μεγιστοβάθμιος όρος του $bf(x) \in J$, άρα $ba \in I$. Αρα το I είναι ιδεώδες.

Θέμα 3: Περιγράψτε πότε δύο πολυώνυμα ταυτίζονται στο δακτύλιο - πηλίκο $\mathbb{Z}[x]/I$, όπου I είναι το ιδεώδες που παράγεται από το στοιχείο $x \in \mathbb{Z}[x]$. Ποιός είναι ο πυρήνας του κανονικού ομομορφισμού $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]/I$ και με ποιό δακτύλιο είναι ισόμορφο αυτό το πηλίκο;

Λύση: Δύο πολυώνυμα ταυτίζονται στο δακτύλιο - πηλίκο αν η διαφορά τους ανήκει στο ιδεώδες, δηλαδή διαιρείται από το πολυώνυμο x, δηλαδή τα δυό πολυώνυμα έχουν τον ίδιο σταθερό όρο. Αφού ο κανονικός ομομορφισμός ε είναι επί, δηλαδή η εικόνα του είναι ο $\mathbb{Z}[x]/I$, και είναι ισόμορφη με $\mathbb{Z}[x]/\mathrm{ker}\varepsilon$, προκύπτει ότι ο πυρήνας ισούται με I. Ο πυρήνας απαρτίζεται από τα πολυώνυμα που ανήκουν στο I, δηλαδή διαιρούνται από το x, δηλαδή έχουν σταθερό όρο ίσο με 0. Η απεικόνιση που στέλνει την κλάση ενος πολυωνύμου στο σταθερό του όρο είναι καλά ορισμένη (αφού δύο πολυώνυμα που ταυτίζονται στο πηλίκο έχουν τον ίδιο σταθερό όρο), είναι προφανώς ομομορφισμός, είναι επί (κάθε ακέραιος a είναι ο σταθερός όρος του σταθερού πολυωνύμου a), είναι ένα - προς - ένα (αφού δύο πολυώνυμα ταυτίζονται στο πηλίκο ακριβώς όταν έχουν τον ίδιο σταθερό όρο), άρα είναι ισομορφισμός από το δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]/I$ στους ακεραίους.

Θέμα 4: α) Γράψτε το στοιχείο

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 7 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

του S_9 ως γινόμενο ξένων κύκλων.

β) Αν α και β είναι ξένες μεταξύ τους μεταθέσεις του συνόλου X και το $x \in X$ δε μένει σταθερό από την α, εξηγείστε αναλυτικά γιατί $(\beta \cdot \alpha \cdot \beta)(x) = \alpha(x)$.

Λύση: α) Εντοπίζουμε αρχικά τον κύκλο (2 4 6 7), πολλαπλασιάζουμε με τον αντίστροφό του, προκύπτει μία μετάθεση στην οποία εντοπίζουμε τον κύκλο (3 5), συνεχίζουμε ομοίως, προκύπτει μία μετάθεση που περιέχει τον κύκλο (8 9), συνεχίζουμε και προκύπτει η ταυτοτική μετάθεση, άρα η δοσμένη ισούται με το γινόμενο

$$(2\,4\,6\,7) \cdot (3\,5) \cdot (8\,9)$$

β) Εξ ορισμού, όταν α και β είναι ξένες μεταξύ τους μεταθέσεις του συνόλου X και το $x \in X$ δε μένει σταθερό από την α, τότε μένει σταθερό από τη β, δηλαδή $\beta(x) = x$. Επιπλέον οι ξένες μεταξύ τους μεταθέσεις αντιμετατίθενται. Αρα

$$(\beta \cdot \alpha \cdot \beta)(x) = (\beta \cdot \alpha)(x) = (\alpha \cdot \beta)(x) = \alpha(x)$$

Θέμα 5: Θεωρούμε έναν ομομορφισμό ομάδων $f\colon G \to H$, με G, H πεπερασμένες ομάδες. Υποθέτουμε ότι οι τάξεις των δύο ομάδων είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in G$, $f(x) = 1_H$.

Λύση: Η εικόνα του ομομορφισμού είναι υπό-ομάδα της H, επομένως η τάξη της διαιρεί εκείνην της H. Ο πυρήνας του ομομορφισμού είναι υπό-ομάδα της G, επομένως και αυτής η τάξη διαιρεί εκείνην της G. Επειδή το πηλίκο $G/\mathrm{ker}f$ είναι ισόμορφο με την εικόνα, σημαίνει ότι $|G| : |\mathrm{ker}f| = |\mathrm{Im}f|$, δηλαδή η τάξη της εικόνας θα διαιρεί την τάξη της G. Αρα διαιρεί και το μέγιστο κοινό διαιρέτη των δύο τάξεων, δηλαδή το 1, δηλαδή περιέχει μόνο ένα στοιχείο (αναγκαστικά το 1_H), που σημαίνει ότι για κάθε $x \in G$, $f(x) = 1_H$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ