Θεωρία Πιθανοτήτων Ι – Λύσεις Θεμάτων 01/2016

Θέμα 1. (α) Θεωρία. Στην περίπτωση ανεξαρτησίας $P(A\cap B) = P(A)P(B) = p^2$ και ανάλογα $P(B\cap \Gamma) = p^2$, $P(\Gamma\cap A) = p^2$, $P(A\cap B\cap \Gamma) = p^3$.

(β) $AA\ldots A\Gamma\Gamma\ldots\Gamma$ ή $\Gamma\Gamma\ldots\Gamma AA\ldots A$, δηλαδή $2m!\,n!$ ευνοϊκά αποτελέσματα. Τα δυνατά αποτελέσματα είναι $(m+n)!$, άρα η πιθανότητα είναι $2m!\,n!/(n+m)!$.

(γ) Θεωρία.

—.—

Θέμα 2. (α) $P(\text{απόρριψη}) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=} P(\text{απόρριψη}|\text{ελαττωματικό})P(\text{ελαττωματικό}) + P(\text{απόρριψη}|\text{μη ελαττωματικό})P(\text{μη ελαττωματικό}) = 0.95*0.01 + 0.01*0.99$.

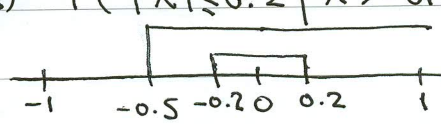
(β) $P(\text{μη ελαττωματικό}\,|\,\text{μη απόρριψη}) = \dfrac{P(\text{μη απόρριψη}|\text{μη ελαττωματικό})P(\text{μη ελαττωμ.})}{P(\text{μη απόρριψη})}$

$= \dfrac{0.99 * 0.99}{1-(\alpha)}$

—.—

Θέμα 3. (α) $F(x) = 0$, αν $x<-1$, $F(x)=1$, αν $x>1$. Για $-1\le x\le 0$, $F(x) = \int_{-1}^{x} t^2\,dt = \frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}$. Για $0<x\le 1$, $F(x) = \int_{-1}^{0} t^2\,dt + \int_0^x (1-t^2)\,dt = \frac{1}{3}+x-\frac{x^3}{3}$.

(β) $P(|X|\le 0.2\,|\,X>-0.5) = \dfrac{P(|X|\le 0.2,\ X>-0.5)}{P(X>-0.5)} = \dfrac{P(|X|\le 0.2)}{P(X>-0.5)} = \dfrac{P(-0.2\le X\le 0.2)}{1-P(X\le -0.5)} =$



$= \dfrac{F(0.2)-F(-0.2)}{1-F(0.5)} = \ldots \left(\text{ή } = \dfrac{\int_{-0.2}^{0.2} f(x)\,dx}{\int_{0.5}^{1} f(x)\,dx} = \ldots\right)$

(γ) $E|X| = \int_{-1}^{1} |x| f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)\,x^2\,dx + \int_0^1 x(1-x^2)\,dx = \ldots$

$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{0} x^2\cdot x^2\,dx + \int_0^1 x^2(1-x^2)\,dx = \ldots$

$\mathrm{Var}(|X|) = E(X^2) - (E|X|)^2 = \ldots$

—.—

Θέμα 4. Λύθηκε στην τάξη. Στο (δ), η πυκνότητα είναι $\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$ και απαιτείται υπολογισμός των $E((1-X)^2)$ και $E((1-X)^4)$. Η πρώτη μέση τιμή είναι $B(\alpha,\beta+2)/B(\alpha,\beta) = \ldots$ και η δεύτερη $B(\alpha,\beta+4)/B(\alpha,\beta) = \ldots$

—.—

Θέμα 5. Λύθηκε στην τάξη.