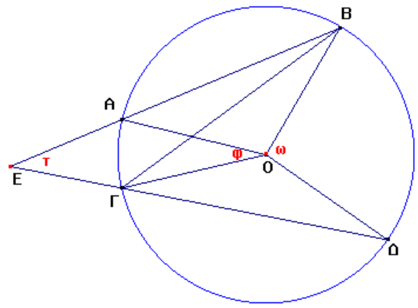
Θέμα 1 [2]

Δείξτε ότι:

Η γωνία που σχηματίζεται από δύο χορδές ενός κύκλου, οι οποίες τέμνονται έξω από αυτόν, είναι ίση με την ημιδιαφορά των δύο επικέντρων γωνιών οι οποίες βαίνουν στα τόξα που περιέχονται μεταξύ των χορδών αυτών.

Απόδειξη: Έστω ένας κύκλος, ο Ο, και ΑΒ, ΓΔ δύο χορδές του, που τέμνονται σ' ένα σημείο έξω απ' αυτόν, το Ε, και σχηματίζουν την γωνία $\boldsymbol{\tau}$. Έστω ακόμη ΑΓ και ΒΔ τα (μικρά) τόξα που αποκόπτουν οι χορδές αυτές και ω και φ οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες. Πρέπει να δείξουμε ότι:



$$\tau = \frac{\omega - \varphi}{2}$$

Από το γεγονός ότι μια εγγεγραμμένη γωνία είναι το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο, απορρέουν οι σχέσεις:

$\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = \frac{\omega}{2}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \frac{\varphi}{2}$.

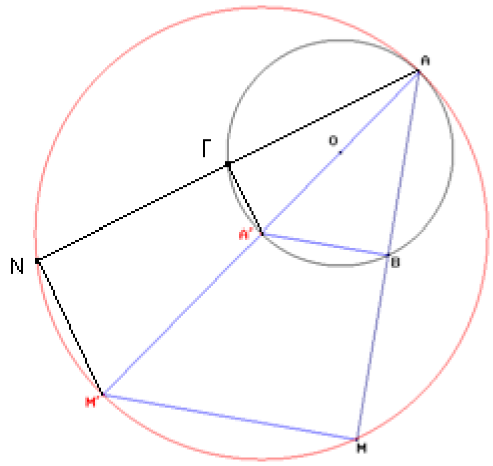
Από το τρίγωνο δε ΕΓΒ, έχουμε ότι $\tau = \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta - \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ Απ' όπου με αντικατάσταση απορρέει το ζητούμενο.

Θέμα 2 [2]

Δίδεται κύκλος με κέντρο Ο και ένα σημείο Α πάνω σ' αυτόν. Φέρουμε από το Α μια τυχαία χορδή την ΑΒ και πάνω στην προέκτασή της προς το Β παίρνουμε ένα σημείο, το Μ, τέτοιο ώστε ΑΒ=ΒΜ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ όταν το Β διατρέχει τον κύκλο.

Απάντηση

Ανάλυση1: Κατασκευάζουμε το σχήμα σύμφωνα με την εκφώνηση και προσπαθούμε να εντοπίσουμε κάποια κατασκευάσιμα σημεία το τόπου αναζητώντας την κατασκευή του από τα δεδομένα του προβλήματος:



Διατρέχοντας το σημείο Β τον κύκλο Ο, κινούμενο προς τα Α η ΒΑ θα μηδενιστεί που σημαίνει πως το Α είναι σημείο του τόπου. Επίσης το Β θα περάσει από το αντιδιαμετρικό Α΄ του Α. Η προέκταση κατά ίσο τμήμα της ΑΑ΄ είναι η ΑΜ΄. Το Μ΄ λοιπόν είναι σημείο του τόπου και κατασκευάσιμο. Το ενώνουμε με το Μ και διαπιστώνουμε ότι: Η Α΄ΒΑ γωνία είναι ορθή αφού βαίνει σε ημικύκλιο. Επίσης στο τρίγωνο ΑΜ΄Μ, από την κατασκευή, τα Α΄ και Β είναι μέσα των πλευρών ΑΜ΄ και ΑΜ, οπότε από γνωστό θεώρημα συνάγεται ότι η Α΄Β είναι παράλληλη στην ΜΜ΄, που σημαίνει ότι η γωνία Μ΄ΜΑ είναι ορθή. Δηλαδή το τυχαίο σημείο Μ του τόπου βλέπει υπό ορθή γωνία το κατασκευάσιμο ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ΄, βρίσκεται επομένως πάνω σ' ένα κύκλο με κέντρο το αντιδιαμετρικό σημείο του Α, το Α΄, και ακτίνα τη διάμετρο του δοθέντος κύκλου.

Ανάλυση 2: Αποδείξαμε ότι τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται πάνω σε προεκτάσεις χορδών οι οποίες είναι ίσες με τη χορδή βρίσκονται στο κύκλο που σχεδιάσαμε ως τόπο, πρέπει τώρα να δείξουμε ότι ο τόπος δεν περιέχει παρά μόνο τέτοια σημεία, ότι δηλαδή κάθε σημείο του τόπου έχει την ορίζουσα ιδιότητα του τόπου.

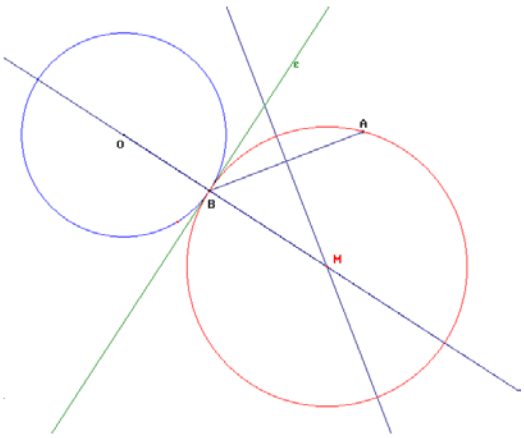
Έστω λοιπόν ένα τυχαίο σημείο του τόπου το Ν. Το ενώνουμε με το Α και έστω Γ η τομή της ΝΑ με τον κύκλο και αποδεικνύουμε ότι ΑΓ=ΑΝ.

Θέμα 3 [2]

Δίδεται κύκλος με κέντρο Ο, ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου, το Α, και ένα σημείο πάνω στον δοθέντα κύκλο, το Β. Να κατασκευαστεί κύκλος διερχόμενος από το Α και εφαπτόμενος του δοθέντα κύκλου στο Β. (υπόδειξη: ακολουθείστε τη μέθοδο Ανάλυση-Σύνθεση-Απόδειξη-Διερεύνηση)

Απάντηση

Ανάλυση: Έστω, σύμφωνα με την εκφώνηση, κύκλος, ο Ο, ένα σημείο το Β πάνω σ΄ αυτόν και ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου το Α. Επειδή ο ζητούμενος κύκλος θα εφάπτεται του Ο στο Β, σημαίνει ότι το κέντρο του θα βρίσκεται πάνω στην ευθεία που περνά από τα Ο και Β, καθότι το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων κύκλων βρίσκεται



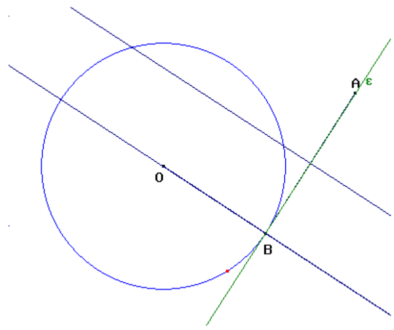
πάνω στη διάκεντρο. Δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου, έστω Μ, του ζητούμενου κύκλου είναι η ευθεία που περνά από τα Ο και Β. Όμως ο κύκλος πρέπει να περνά από το Β και από το Α, που σημαίνει πως το κέντρο του Μ πρέπει να ισαπέχει από τα Β και Α, δηλαδή βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

Σύνθεση: Γράφουμε την ευθεία που περνά από τα Ο και Β, τη μεσοκάθετο στο ΑΒ και έστω Μ το σημείο τομής τους. Με κέντρο το Μ και ακτίνα την ΜΒ γράφουμε ένα κύκλο που είναι ο ζητούμενος.

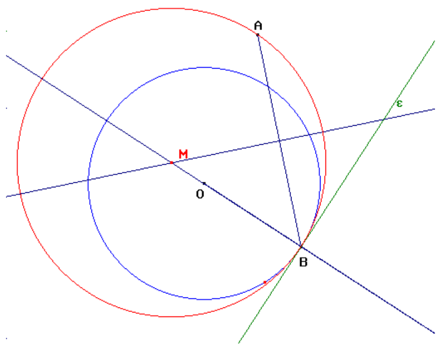
Απόδειξη: Ο κύκλος με κέντρο Μ είναι ο ζητούμενος καθότι είναι εφαπτόμενος του Ο, αφού η ΜΟ είναι διάκεντρος και έχει ακτίνα ΜΒ, και διέρχεται από το Α αφού το κέντρο του βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο στο ΑΒ, δηλαδή ΜΒ=ΜΑ.

Διερεύνηση: Θα πρέπει να εξετάσουμε αν η κατασκευή είναι δυνατή για κάθε δυνατή θέση του Α.

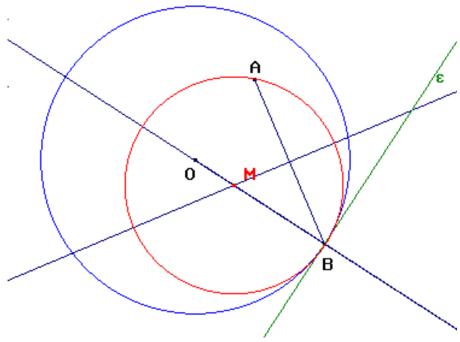
1) Για να είναι δυνατή η κατασκευή του ζητούμενου κύκλου θα πρέπει οι δύο γεωμετρικοί τόποι μέσω των οποίων προσδιορίζεται το κέντρο του το Μ, να τέμνονται. Η μόνη περίπτωση που η μεσοκάθετος στην ΑΒ δεν τέμνει την ΟΒ είναι να είναι παράλληλη με αυτήν που σημαίνει ότι και οι δύο πρέπει να είναι κάθετες πάνω στην ίδια ευθεία, δηλαδή η ΑΒ είναι κάθετη στην ΟΒ, δηλαδή το Α βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε που είναι κάθετη στην ΟΒ στο Β. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις ο ζητούμενος κύκλος είναι κατασκευάσιμος.



2) Η ε χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα. Αν το Α βρεθεί στο αριστερό ημιεπίπεδο τότε οι δύο κύκλοι θα είναι πάλι εφαπτόμενοι αλλά ο αρχικός κύκλος θα εφάπτεται εσωτερικά στον ζητούμενο.



3) Τέλος αν το σημείο Α είναι εσωτερικό του κύκλου, το πρόβλημα πάλι έχει λύση, ο δε ζητούμενος κύκλος εφάπτεται εσωτερικά στον αρχικό:

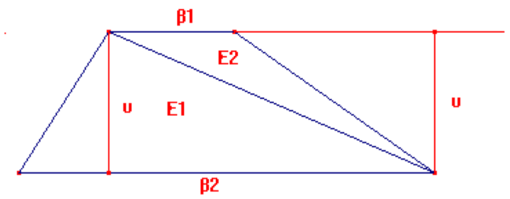


Θέμα 4 [2]

Υπάρχουν τουλάχιστον πέντε διαφορετικοί τρόποι εύρεσης ενός γενικού τύπου που να δίνει το εμβαδόν ενός τραπεζίου, συναρτήσει των δύο βάσεων, β_1 και β_2, και του ύψους υ. Βρείτε δύο από αυτούς και προκρίνεται τον ένα τον οποίο θεωρείτε καταλληλότερο για διδακτικούς σκοπούς στην Α΄ Λυκείου.

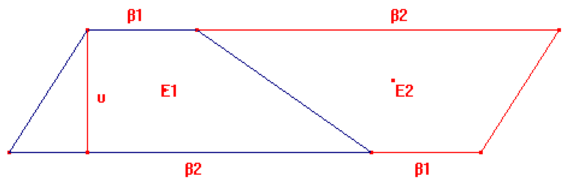
Απάντηση

<u>1η περίπτωση</u>: Μια διαγώνιος χωρίζει το τραπέζιο σε δύο ισοϋψή τρίγωνα :



$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 = \frac{\beta_2\upsilon}{2} + \frac{\beta_1\upsilon}{2} = \frac{(\beta_1+\beta_2)\upsilon}{2}$$

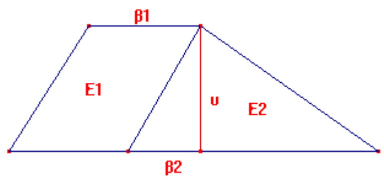
<u>2η Περίπτωση</u>: Προεκτείνουμε τις βάσεις και προσθέτουμε στη μικρή τη μεγάλη και αντίστροφα. Προκύπτει παραλληλόγραμμο αποτελούμενο από δύο ίδια (ίσα και όμοια) τραπέζια



$\mathrm{E}_{\pi\alpha\rho/\mu o\upsilon}=(\beta_1+\beta_2)\upsilon$, και

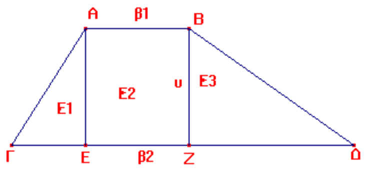
$$\mathrm{E} = \frac{(\beta_1+\beta_2)\upsilon}{2}$$

<u>3η Περίπτωση</u>:



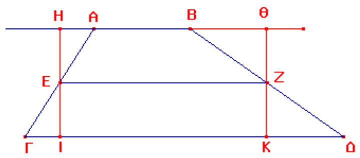
$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 = \beta_1\upsilon + \frac{(\beta_2-\beta_1)\upsilon}{2} = \frac{(\beta_1+\beta_2)\upsilon}{2}$$

<u>4η Περίπτωση</u>:



$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3 = \frac{\Gamma\mathrm{E}\upsilon}{2} + \beta_2\upsilon + \frac{\Delta\mathrm{Z}\upsilon}{2} = \frac{(\Gamma\mathrm{E}+\beta_2+\Delta\mathrm{Z})+\beta_2}{2} = \frac{(\beta_1+\beta_2)\upsilon}{2}$$

<u>5η Περίπτωση</u>: Φέρνουμε τη διάμεσο ΕΖ η οποία ξέρουμε πως είναι $\mathrm{E}Z = \frac{(\beta_1+\beta_2)}{2}$



Από τα Ε και Ζ φέρνουμε κάθετες, οπότε τα σχηματιζόμενα να τρίγωνα είναι ΕΓΙ=ΕΗΑ και ΖΚΔ=ΖΘΒ, ως ορθογώνια με τις υποτείνουσες ίσες και μία οξεία γωνία.

Άρα (ΑΒΓΔ)=(ΗΙΚΖ)= $\mathrm{E} = \frac{(\beta_1+\beta_2)}{2}\upsilon$

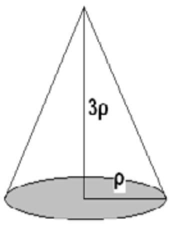
Για διδακτικούς τώρα σκοπούς προκρίνεται η δεύτερη λύση, που μεθοδολογικά είναι ίδια με τη μεθοδολογία εύρεσης ενός τύπου για το εμβαδόν του τριγώνου, ώστε να δοθεί η ευκαιρία για τη σχετική επανάληψη.

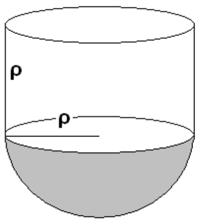
(Η πρώτη επίσης λύση –καθώς και η τρίτη- είναι καλές καθότι υποβάλουν την ιδέα πως το εμβαδόν ενός σχήματος μπορεί εύκολα να βρεθεί αν το σχήμα χωριστεί σε τμήματα υπολογίσιμου εμβαδού)

Θέμα 5[2]

Δίδεται ένα δοχείο σε σχήμα κώνου με ύψος τριπλάσιο από την ακτίνα της βάσης και ένα άλλο κυλινδρικό με ακτίνα βάσης ίση με αυτήν του κώνου και ύψος ίσο με αυτή την ακτίνα. Ο πυθμένας του δοχείου αυτού είναι ένα ημισφαίριο. Αν γεμίσουμε το κωνικό δοχείο με νερό και το αδειάσουμε στο κυλινδρικό με την ημισφαίρια βάση, τι κλάσμα του κυλινδρικού μέρους του θα μείνει κενό;

Απάντηση





$$V_{κων} = \frac{1}{3}\pi\rho^2(3\rho) = \pi\rho^3$$

$$V_{δοχ} = V_{κυλ} + V_{ημισφ} = \pi\rho^2\rho + \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi\rho^3) = \frac{5}{3}\pi\rho^3$$

$$V_{δοχ} - V_{κων} = \frac{5}{3}\pi\rho^3 - \pi\rho^3 = \frac{2}{3}\pi\rho^3$$

Δηλαδή τα $\frac{2}{3}$ του κυλινδρικού μέρους του δοχείου θα μείνουν κενά