Θεωρία Πιθανοτήτων Ι - Λύσεις Ασκήσεων 1111

1. Λύθηκε στην τάξη.

2. $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1) = n - n + 1 = 1$, άρα $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = 1$.

3. (α) Πρέπει να δείξουμε ότι $P(A^c \cap (B^c \cup \Gamma^c)) = P(A^c) P(B^c \cup \Gamma^c)$. (1)

$P(A^c \cap (B^c \cup \Gamma^c)) = P(A^c \cap (B \cap \Gamma)^c) = P((A \cup (B \cap \Gamma))^c) =$
$= 1 - P(A \cup (B \cap \Gamma)) = 1 - P(A) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma) \overset{\text{ανεξ. } A, B, \Gamma}{=}$
$= P(A^c) - P(B \cap \Gamma) + P(A) P(B) P(\Gamma) \overset{\text{ανεξ. } B, \Gamma}{=}$
$= P(A^c) - P(B \cap \Gamma) + P(A) P(B \cap \Gamma) =$
$= P(A^c) - P(B \cap \Gamma)(1 - P(A)) = P(A^c) - P(B \cap \Gamma) P(A^c) =$
$= P(A^c)(1 - P(B \cap \Gamma)) = P(A^c) P((B \cap \Gamma)^c) = P(A^c) P(B^c \cup \Gamma^c)$, δηλαδή η (1) ισχύει.

(β) Θα πρέπει να δείξουμε ότι (β1) είναι ανά δύο ανεξάρτητα, $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) P(B^c)$, $P(A^c \cap \Gamma^c) = P(A^c) P(\Gamma^c)$, $P(B^c \cap \Gamma^c) = P(B^c) P(\Gamma^c)$ και

(β2) $P(A^c \cap B^c \cap \Gamma^c) = P(A^c) P(B^c) P(\Gamma^c)$.

(β1). $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \overset{\text{ανεξ. } A, B}{=}$
$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) P(B) = 1 - P(A) + P(B)(P(A) - 1) = P(A^c) - P(B) P(A^c)$
$= P(A^c)(1 - P(B)) = P(A^c) P(B^c)$. Παρόμοια αποδεικνύονται και οι άλλες δύο σχέσεις.

(β2). $P(A^c \cap B^c \cap \Gamma^c) = P((A \cup B \cup \Gamma)^c) = 1 - P(A \cup B \cup \Gamma) = 1 - \{P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(B \cap \Gamma) - P(A \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)\} \overset{\text{ανεξ.}}{=} 1 - P(A) - P(B) - P(\Gamma) + P(A) P(B) + P(B) P(\Gamma) + P(A) P(\Gamma) - P(A) P(B) P(\Gamma) =$
$= (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(\Gamma)) = P(A^c) P(B^c) P(\Gamma^c)$

4. $P(A) = \frac{4}{8}$, $P(B) = \frac{4}{8}$, $P(\Gamma) = \frac{4}{8}$, $A \cap B = \{KKK\}$. Επομένως, $P(A \cap B) = \frac{1}{8} \neq P(A) P(B) = \frac{1}{4}$, δηλαδή τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα. Παρόμοια, τα B και Γ δεν είναι ανεξάρτητα, ούτε τα A και Γ. Όμως, $A \cap B \cap \Gamma = \{KKK\}$ οπότε $P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{8} = P(A) P(B) P(\Gamma)$.

5. (Εφαρμογή του τύπου Bayes για διαμέριση δύο συνόλων $\{B, B^c\}$.

$$P(B_1 | A) = \frac{P(A|B_1) P(B_1)}{P(A|B_1) P(B_1) + P(A|B_2) P(B_2)},$$ όπου $B_1 = B$, $B_2 = B^c$)

Στην προκειμένη περίπτωση