

Θεωρία Πιθανοτήτων Ι - Λύσεις Ασκήσεων 1111

1. Λύθηκε στην τάξη.

2.  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1) = n - n + 1 = 1$ , οπότε  $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = 1$ .

3. (α) Πρέπει να δείξουμε ότι  $P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = P(A^c)P(B^c \cup C^c)$ . (1)

$$\begin{aligned} P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) &= P(A^c \cap (B \cap C)^c) = P((A \cup (B \cap C))^c) = \\ &= 1 - P(A \cup (B \cap C)) = 1 - P(A) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \\ &= P(A^c) - P(B \cap C) + P(A)P(B)P(C) = \text{ανεξ. } A, B, C \\ &= P(A^c) - P(B \cap C) + P(A)P(B \cap C) = \text{ανεξ. } B, C \\ &= P(A^c) - P(B \cap C)(1 - P(A)) = P(A^c) - P(B \cap C)P(A^c) = \\ &= P(A^c)(1 - P(B \cap C)) = P(A^c)P((B \cap C)^c) = P(A^c)P(B^c \cup C^c), \text{ δηλαδή} \end{aligned}$$

η (1) ισχύει.

(β) Θα πρέπει να δείξουμε ότι (β1) είναι ανά δύο ανεξαρτησία,  $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$ ,  $P(A^c \cap C^c) = P(A^c)P(C^c)$ ,  $P(B^c \cap C^c) = P(B^c)P(C^c)$  και

(β2)  $P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P(A^c)P(B^c)P(C^c)$ .

(β1).  $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$   
 $= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - P(A) + P(B)(P(A) - 1) = P(A^c) - P(B)P(A^c)$   
 $= P(A^c)(1 - P(B)) = P(A^c)P(B^c)$ . Παρόμοια αποδεικνύονται και οι άλλες δύο σχέσεις.

(β2).  $P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P((A \cup B \cup C)^c) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - \{P(A) + P(B) + P(C) -$   
 $P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)\} =$   
 $= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A)P(B) + P(B)P(C) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) =$   
 $= (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C)) = P(A^c)P(B^c)P(C^c)$

4.  $P(A) = \frac{4}{8}$ ,  $P(B) = \frac{4}{8}$ ,  $P(C) = \frac{4}{8}$ ,  $A \cap B = \{kkk\}$ . Επομένως,  
 $P(A \cap B) = \frac{1}{8} \neq P(A)P(B) = \frac{1}{4}$ , δηλαδή τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.  
 Παρόμοια, τα B και C δεν είναι ανεξάρτητα, ούτε τα A και C.  
 Όμως,  $A \cap B \cap C = \{kkk\}$  οπότε  $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$ .

5. (Εφαρμογή του τύπου Bayes για διαμέριση δύο συνόλων,  $\{B, B^c\}$ ).

$$P(B_1 | A) = \frac{P(A | B_1)P(B_1)}{P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2)}, \text{ όπου } B_1 = B, B_2 = B^c$$

Στην προκειμένη περίπτωση

$$P(1^{\text{η}} \text{ μπαλα λευκή} | 2^{\text{η}} \text{ μπαλα λευκή}) = \frac{P(2^{\text{η}} \Lambda | 1^{\text{η}} \Lambda) P(1^{\text{η}} \Lambda)}{P(2^{\text{η}} \Lambda | 1^{\text{η}} \Lambda) P(1^{\text{η}} \Lambda) + P(2^{\text{η}} \Lambda | 1^{\text{η}} M) P(1^{\text{η}} M)}$$

$$= \frac{\frac{\Lambda+1}{\Lambda+M+1} \cdot \frac{\Lambda}{\Lambda+M}}{\frac{\Lambda+1}{\Lambda+M+1} \cdot \frac{\Lambda}{\Lambda+M} + \frac{\Lambda}{\Lambda+M+1} \cdot \frac{M}{\Lambda+M}} = \frac{\Lambda(\Lambda+1)}{\Lambda(\Lambda+1) + \Lambda M} = \frac{\Lambda+1}{\Lambda+M+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{η}} \Lambda \\ 1^{\text{η}} M \end{array} \right.$$

(1) παρατηρήστε ότι ισχύει  $P(1^{\text{η}} \Lambda | 2^{\text{η}} \Lambda) = P(2^{\text{η}} \Lambda | 1^{\text{η}} \Lambda)$ , γενικά τότε ισχύει  $P(A|B) = P(B|A)$ ;

6.  $P(\text{αθροισμα των δύο ζαριών } 4) = P(\{(3,1), (1,3), (2,2)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ .  
Για να αναδειχθεί νικητής ο Β στην 10<sup>η</sup> ρίψη πρέπει οι 9 πρώτες να φέρουν αθροισμα διάφορο του 4 και η 10<sup>η</sup> να φέρει αθροισμα 4. Επομένως (λόγω ανεξαρτησίας),

$$P(\text{ο Β νικητής στην } 10^{\text{η}} \text{ ρίψη}) = \left(\frac{11}{12}\right)^9 \cdot \frac{1}{12}$$

Επειδή ο Β παίζει δεύτερος, έχει τη δυνατότητα να αναδειχθεί νικητής ή στην 2<sup>η</sup> ρίψη ή στην 4<sup>η</sup> ή και

Ορίσουμε τα ενδεχόμενα  $B_{2k} = \text{ο Β αναδεικνύεται νικητής στην } 2k \text{ ρίψη}$ ,  $k=1, 2, 3, \dots$ . Τότε  $P(B_{2k}) = \left(\frac{11}{12}\right)^{2k-1} \cdot \frac{1}{12}$ , τα ενδεχόμενα  $B_{2k}$ ,  $k=1, 2, \dots$  είναι (προφανώς) ζένα ανά δύο και

$$P(\text{ο Β νικητής}) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{11}{12}\right)^{2k-1} \cdot \frac{1}{12} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{11} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{11}{12}\right)^2\right]^k = \frac{1}{11} \cdot \frac{\left(\frac{11}{12}\right)^2}{1 - \left(\frac{11}{12}\right)^2} = \frac{11}{23}$$

Άλλος τρόπος: Αν  $x = P(\text{ο Α νικητής})$ , τότε  $P(\text{ο Β νικητής}) = \frac{11}{12} \cdot x$  και επειδή (τελικά) κάποιος θα φέρει αθροισμα 4 με πιθανότητα 1, έχουμε  $x + \frac{11}{12} x = 1 \Rightarrow x = \frac{12}{23}$ , οπότε  $P(\text{ο Β νικητής}) = \frac{11}{12} \cdot \frac{12}{23} = \frac{11}{23}$ .

7.  $A \xrightarrow{\quad} \Gamma \quad \Delta \quad B$

Ορίσουμε τα ενδεχόμενα:  $\Gamma = \text{κλείνει ο διακόπτης στο } \Gamma$ ,  $\Delta = \text{κλείνει ο διακόπτης στο } \Delta$ . Τότε  $P(\Gamma) = 0.70$ ,  $P(\Delta^c) = 0.20$ . Υπάρχει η πληροφορία (παιρατήρηση) ότι το ρεύμα δεν έφτασε στο Β. Ζητάμε λοιπόν τη δεσμευμένη πιθανότητα  $P(\Delta^c | B^c)$ , όπου  $B = \text{ενδεχόμενο να φθάσει το ρεύμα στο Β}$ . Έχουμε  $P(\Delta^c | B^c) = \frac{P(\Delta^c \cap B^c)}{P(B^c)}$ . Τώρα,  $\Delta^c \subset B^c$  και επομένως  $\Delta^c \cap B^c = \Delta^c$ . Επί ημεών, και κλείνει ο  $\Delta^c$  <sup>διακόπτης</sup>  $= 1 - P(\Gamma \cap \Delta) = 1 - P(\Gamma)P(\Delta)$ . Τελικά

$$P(\Delta^c | B^c) = \frac{P(\Delta^c)}{1 - P(\Gamma)P(\Delta)} = \frac{0.20 \text{ ανεξ.}}{1 - 0.70 * 0.80} = \frac{0.20}{0.44} = \frac{5}{11}$$

9.  $P(\text{μη λειτουργία συστήματος}) = 1 - P(\text{λειτουργία συστήματος}) = 1 - P(\text{όλα τα υποσυστήματα λειτουργούν}) = 1 - \underset{\text{ανεξαρτησία}}{P_1 \cdot P_2 \cdots P_n}.$

10. α. με επανατοποθέτηση: ο Α μπορεί να κερδίσει στην  $2k+1$  επιλογή,  $k=0,1,2,\dots$   
 Άρα  $P(\text{ο Α κερδίζει}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\text{ο Α κερδίζει στην } 2k+1 \text{ επιλογή}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{2k} \cdot \frac{2}{5} =$   
 $= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{25}{16} = \frac{5}{8}.$  Διαφορετικά, αν  $x$  είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο Α, τότε  $\frac{3}{5}x$  είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο Β. Επειδή, με πιθανότητα 1, κερδίζει ο Α ή ο Β, έχουμε  $x + \frac{3}{5}x = 1$ , δηλαδή  $x = \frac{5}{8}.$

β. χωρίς επανατοποθέτηση: ο Α κερδίζει στην  $1^{\text{η}}$  ή την  $3^{\text{η}}$  επιλογή, άρα  
 $P(\text{ο Α κερδίζει}) = P(\text{χρυσή σφαίρα στην } 1^{\text{η}}) + P(\text{χρυσή σφαίρα στην } 3^{\text{η}}) =$   
 $= \frac{2}{5} + P(MM\Lambda) = \frac{2}{5} + P(M)P(M|M)P(\Lambda|MM) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}.$

11. α.  $P(KKKKKK) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

β.  $P(KKKKKK) + P(\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma) = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^6} = \frac{2}{2^6} = \frac{1}{2^5}$

γ. Πρέπει η  $7^{\text{η}}$  και η  $8^{\text{η}}$  ρίψη να γίνουν Κ και να εμφανιστεί ακριβώς 1 Γ στις πρώτες 6 ρίψεις. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \binom{6}{1} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 6/2^8$ , λόγω ανεξαρτησίας.

8. Έχει χυθεί στην τσάντα.