Θεωρία Πιθανοτήτων Ι – Λύσεις Ασκήσεων 1η

1. (α₁) $A = \{1,2,3,\dots,12\}$

Ένα υποσύνολο του A που περιέχει το 3 και το 7 έχει τη μορφή $\Gamma = \{3,7\} \cup B$, όπου $B \subset \{1,2,4,5,6,8,9,10,11,12\} = \Delta$. Άρα όλα τα υποσύνολα της μορφής Γ είναι όσα είναι τα υποσύνολα B του Δ, δηλαδή 2^{10}. Επομένως, από τον τύπο του Laplace,

P(το υποσύνολο που επιλέγεται τυχαία περιέχει το 3 και το 7) $= \frac{\text{όλα τα ευνοϊκά}}{\text{όλα τα δυνατά}} = \frac{2^{10}}{2^{12}} = \frac{1}{4}$.

(α2) Ένα υποσύνολο Γ του A έχει πληθάριθμο |Γ| που διαιρείται με το 3 ή το 4 αλλά όχι με το 3 και το 4, αν $|\Gamma| \in \{3,4,6,9,8\}$. Το πλήθος των υποσυνόλων του A με κ στοιχεία είναι $\binom{12}{k}$. Επομένως

P(το υποσύνολο έχει πληθάριθμο που διαιρείται με το 3 ή το 4 αλλά όχι με το 3 και το 4) $= \frac{\text{όλα τα ευνοϊκά αποτελέσματα}}{\text{όλα τα δυνατά αποτελέσματα}} = \frac{\binom{12}{3}+\binom{12}{4}+\binom{12}{6}+\binom{12}{8}+\binom{12}{9}}{2^{12}}$.

(β) Ειδική περίπτωση του (γ) για $n=2$.

(γ) $A = \{1,2,3,\dots,12n\}$. Ένα υποσύνολο Γ του A έχει πληθάριθμο |Γ| που διαιρείται με το 3 αν $|\Gamma| = 3k$, $k = 0,1,2,\dots,4n$ (Για $k=4n$, $|\Gamma| = 3\cdot 4n = 12n$, άρα $\Gamma = A$). Ανάλογα, ένα υποσύνολο Γ του A έχει πληθάριθμο |Γ| που διαιρείται με το 4 αν $|\Gamma| = 4\lambda$, $\lambda = 0,1,2,\dots,3n$ (Για $\lambda = 3n$, $|\Gamma| = 4\cdot 3n = 12n$, άρα $\Gamma = A$). Τέλος, ένα υποσύνολο Γ του A έχει πληθάριθμο |Γ| που διαιρείται με το 3 και το 4 αν $|\Gamma| = 12\mu$, $\mu = 0,1,2,\dots,n$ (Για $\mu = n$, $|\Gamma| = 12n$, άρα $\Gamma = A$). Επομένως όλα τα υποσύνολα του A που διαιρούνται με το 3 ή το 4 αλλά όχι με το 3 και το 4 είναι

$\varepsilon = \left\{\sum_{k=0}^{4n}\binom{12n}{3k} - \sum_{\mu=0}^{n}\binom{12n}{12\mu}\right\} + \left\{\sum_{\lambda=0}^{3n}\binom{12n}{4\lambda} - \sum_{\mu=0}^{n}\binom{12n}{12\mu}\right\}$, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p = \frac{\text{ευνοϊκά}}{\text{δυνατά}} = \frac{\varepsilon}{2^{12n}}$.

2. (α) $\frac{1}{10^4}$. (β) Τα πολλαπλάσια του 2 είναι οι αριθμοί $2k$, $k=1,2,\dots,5000$, τα πολλαπλάσια του 5 είναι οι αριθμοί 5μ, $\mu=1,2,\dots,2000$, συνολικά $5000+2000=7000$. Πρέπει όμως να αφαιρεθούν τα πολλαπλάσια του 10, γιατί έχουν μετρηθεί δύο φορές (ως πολλαπλάσια του 2 αλλά και ως πολλαπλάσια του 5) που είναι οι αριθμοί 10λ, $\lambda = 1,2,\dots,1000$, συνολικά 1000 πολλαπλάσια. Τελικά τα πολλαπλάσια του 2 ή του 5 είναι $7000-1000=6000$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p = \frac{\text{ευνοϊκά}}{\text{δυνατά}} = \frac{6000}{1000} = \frac{6}{10}$.