

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Το θεώρημα Tarski-Seidenberg:
Συνέπειες και μία διδακτική
έρευνα στη θεωρία πολυωνύμων
με πραγματικούς συντελεστές

Μ.Δ.Ε. ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Γ. ΝΤΑΡΓΑΡΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Π. ΚΑΡΑΖΕΡΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΤΡΑ 2014

Περιεχόμενα

1	Περί του θεωρήματος	7
1.1	Πραγματικώς κλειστό σώμα	7
1.2	Η ιστορία της δημοσίευσης	8
1.2.1	Το κίνητρο της έρευνας.	10
1.2.2	Η συνεισφορά του Seidenberg.	10
1.3	Συνέπειες	11
1.3.1	Πληρότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας	11
1.3.2	Ημιαλγεβρική Γεωμετρία	11
1.4	Προεκτάσεις	13
2	Η απόδειξη του θεωρήματος	15
2.1	Δυνατές προσεγγίσεις	15
2.2	Πλήθος ριζών πολυωνύμου	16
2.3	Η απόδειξη	19
3	Έρευνα	25
3.1	Διεξαγωγή της έρευνας	28
3.2	Αποτελέσματα	30
3.2.1	Συνοπική παρουσίαση	30
3.2.2	Απαντήσεις ανά ερώτημα	32
3.2.3	Αποτελέσματα ανά σκοπό	55
3.3	Συμπεράσματα-Παρατηρήσεις	57

Εισαγωγή

Το αντικείμενο μελέτης της εργασίας αυτής είναι κατά μείζονα λόγο το θεώρημα Tarski-Seidenberg. Το εν λόγω θεώρημα δύναται να εκφρασθεί ως εξής:

Θεώρημα. Η θεωρία των πραγματικώς κλειστών σωμάτων επιδέχεται απαλοιοφή ποσοδεικτών στη γλώσσα $L = \{+, -, \cdot, 0, 1, \leq\}$.

Δηλαδή για κάθε τύπο της γλώσσας με ελεύθερες μεταβλητές $(x_1, \dots, x_n)$, με χρήση των αξιωμάτων της θεωρίας, μπορεί να βρεθεί ένας ισοδύναμός του, ψ ο οποίος δεν περιέχει ποσοδείκτες. Ειδικότερα, αν ο ϕ είναι πρόταση (δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές), τότε και ο ψ είναι πρόταση, δηλαδή είναι μία σχέση που συνδέει σταθερές της γλώσσας. Μία δεύτερη, πιο εύληπτη μορφή του θεωρήματος, για τους λιγότερο μυημένους στη Μαθηματική Λογική είναι η παρακάτω

Θεώρημα. Έστω A ένα ημιαλγεβρικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$ και $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, η προβολή στις πρώτες n μεταβλητές. Τότε το $\pi(A)$ είναι ημιαλγεβρικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Ασχολούμαστε με αυτό στο πρώτο μέρος, το οποίο αποτελείται από τα κεφάλαια 1 και 2. Συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο μελετάμε το κίνητρο που ώθησε τον Tarski σε αυτή την έρευνα, εξιστορούμε την πορεία της ιδέας του από την ανακάλυψη μέχρι τη δημοσίευση και έπειτα προσπαθούμε να σχηματίσουμε ευκρινώς τη συνολική επίδραση του θεωρήματος στα μαθηματικά και όχι μόνο. Για την ακρίβεια, αναφερόμαστε στην πληρότητα της Ευκλείδειας γεωμετρίας ως συνέπεια του θεωρήματος, στη συμβολή του θεωρήματος στην ανάπτυξη της ημιαλγεβρικής γεωμετρίας, μίας θεωρίας με πλήθος εφαρμογών σε άλλα επιστημονικά πεδία. Στη συνέχεια εκθέτουμε κάποιες προεκτάσεις του θεωρήματος σε θεωρίες εμπλουτισμένες με επιπλέον μονομελείς πράξεις που αντιστοιχούν σε υπερβατικές συναρτήσεις.

Το δεύτερο είναι ένα πιο τεχνικό κεφάλαιο στο οποίο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η πρωτοβάθμια θεωρία των πραγματικώς κλειστών σωμάτων είναι πλήρης, δηλαδή κάθε τύπος της είναι αποχρίσιμος. Με άλλα λόγια, να δείξουμε ότι για κάθε τύπο μπορούμε να βρούμε ποιες ακριβώς απονομές τιμών για τις ελεύθερες μεταβλητές

του τον επαληθεύουν. Για το σκοπό αυτό εκθέτουμε μία στοιχειώδη απόδειξη του θεωρήματος Tarski-Seidenberg ακολουθώντας το πνεύμα της κλασικής απόδειξης του Tarski, χρησιμοποιώντας όμως πιο σύγχρονη ορολογία. Εκθέτουμε ακόμα τα συναφή θεωρήματα των Sturm και Sylvester, καθώς σε αυτά βασίζεται η εν λόγω απόδειξη. Στο ίδιο κεφάλαιο αναφερόμαστε ακροθιγώς στις κυριότερες από τις πολλές προσεγγίσεις του θεωρήματος και της απόδειξής του που έχουν εμφανιστεί από την πρώτη έκδοση της εργασίας του Tarski μέχρι σήμερα.

Το τρίτο κεφάλαιο αποτελεί το δεύτερο μέρος της εργασίας. Σε αυτό παρουσιάζουμε μία δοκιμαστική διδακτική έρευνα που διενεργήσαμε με τη συμμετοχή εθελοντών φοιτητών του Τμήματος. Η έρευνα αφορά σε στοιχειώδη ζητήματα της θεωρίας πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Σκοπός της είναι κυρίως να διαγνώσει πιθανά γνωστικά κενά των φοιτητών. Η έρευνα συνίστατο στη σύνταξη ενός ερωτηματολογίου με κατάλληλες ερωτήσεις και στη συνέχεια στην απροειδοποίητη διανομή του ερωτηματολογίου προς απάντηση σε δύο τμήματα ενός υποχρεωτικού μαθήματος τετάρτου εξαμήνου. Παρουσιάζονται λοιπόν σε αυτό το κεφάλαιο οι λεπτομέρειες της διεξαγωγής της έρευνας και τα αποτελέσματά της.

Η ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας σημαίνει ταυτόχρονα την ολοκλήρωση αυτού του μεταπτυχιακού κύκλου σπουδών για το γράφοντα. Στο σημείο αυτό επιθυμώ να ευχαριστήσω όλα τα μέλη Δ.Ε.Π. του τομέα Π.Ι.Φ.Μ. των Μαθηματικών του Τμήματος, εν ενεργεία και μη, για το ειλικρινές ενδιαφέρον που επιδεικνύουν για την βέλτιστη δυνατή επιμόρφωση, τη δική μου και των υπολοίπων φοιτητών του Μ.Π. της Διδακτικής των Μαθηματικών. Ιδιαίτερος αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς τον επιβλέποντα την εργασία αυτή για την υπέρ το δέον μέριμνά του για την ολοκλήρωση της παρούσας. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω όλους τους ανώνυμους εθελοντές φοιτητές που πρόθυμα έλαβαν μέρος στη διδακτική μας έρευνα.

Κεφάλαιο 1

Περί του θεωρήματος

1.1 Πραγματικώς κλειστό σώμα

Η έννοια του πραγματικώς κλειστού σώματος προσπαθεί να περιγράψει αφαιρετικά τις βασικές δομικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. Έχει μελετηθεί εκτενώς από τις απαρχές της αφηρημένης προσέγγισης στην άλγεβρα τις πρώτες δεκαετίες του 20ου αιώνα. Παραδείγματα της έννοιας, πέραν του προφανούς των πραγματικών αριθμών, αποτελούν το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών και το σύνολο των μη-συμβατικών πραγματικών αριθμών (παράδειγμα μη-Αρχιμήδειου πραγματικώς κλειστού σώματος).

Η έννοια αυτή επιδέχεται αξιωματικοποίηση στο πλαίσιο της Κατηγορηματικής Λογικής σε μία γλώσσα που έχει ως πρωταρχικά σύμβολα τα $+$, $-()$, $\cdot$, $\leq$, 0 , 1 . Τα αξιώματα της θεωρίας των πραγματικώς κλειστών σωμάτων είναι τα εξής:

1) Τα αξιώματα των αντιμεταθετικών δακτυλίων

2) $\forall x(x = 0 \vee \exists x'(x \cdot x' = 1))$

Τα (1) και (2) ορίζουν την έννοια του σώματος.

3) Αξιώματα διάταξης (για μία σχέση $\leq$)

$\forall x(x \leq x)$

$\forall x \forall y \forall z((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$

$\forall x \forall y((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$

4) Γραμμικότητα διάταξης: $\forall x \forall y(x \leq y \vee y \leq x)$

5) Συμβατικότητα της σχέσης με τις πράξεις

$\forall x \forall y \forall z(x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z)$

$\forall x \forall y \forall z((x \leq y \wedge 0 \leq z) \rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z)$

Τα αξιώματα μέχρι εδώ ορίζουν την έννοια του διατεταγμένου σώματος.

6) Το -1 δεν έχει ρίζα: $\neg \exists x(x \cdot x = -1)$

7) $\forall c \forall a \forall b ((c_n a^n + \dots + c_0)(c_n b^n + \dots + c_0) < 0 \rightarrow \exists \xi (a < \xi < b \wedge c_n \xi^n + \dots + c_0 = 0))$, όπου $\forall c$ σημαίνει $\forall c_n, \dots, \forall c_0$ και $a < b$ σημαίνει $a \leq b \wedge \neg(a = b)$. Το (7) είναι το γνωστό θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, το οποίο όμως εδώ επέχει θέση αξιωματικού σχήματος.

Πολλές από τις στοιχειώδεις προτάσεις της ανάλυσης που εκφράζονται σε αυτή τη γλώσσα ισχύουν γενικώς στο πλαίσιο της θεωρίας, όπως π.χ. η συνέχεια των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Το ίδιο ισχύει και αναφορικά με τη συσχέτιση της μονοτονίας μίας πολυωνυμικής συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου. Προφανώς η παράγωγος είναι ορίσιμη σε αυτή τη γλώσσα προκειμένου για πολυωνυμικές συναρτήσεις.

1.2 Η ιστορία της δημοσίευσης

Η δημοσίευση του θεωρήματος που μελετάμε έγινε επίσημα το 1948 στην πρώτη έκδοση του [2]. Ωστόσο, το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας αυτής ανακαλύφθηκε και δημοσιεύθηκε, μολονότι όχι ρητά διατυπωμένο, από τον Tarski το 1930. Συγκεκριμένα, στο [4], (σελ. 234) υποδεικνύει μία παραλλαγή του θεωρήματος 2 του ιδίου, κατά την οποία ο όρος “ρητά” αντικαθίσταται από τον όρο “αλγεβρικά”. Αυτή την παραλλαγή μπορούμε να αποδώσουμε ως εξής:

“Προκειμένου ένα σύνολο αριθμών A να είναι αριθμητικά ορίσιμο, είναι αναγκαίο και αρκετό να είναι το A μία ένωση πεπερασμένου πλήθους (ανοικτών ή κλειστών) διαστημάτων με αλγεβρικά άκρα.”

Εκ πρώτης όψεως δεν είναι εμφανής η συνάφεια του θεωρήματος αυτού με το γνωστό θεώρημα Tarski-Seidenberg. Ο Tarski περιγράφει [2], (σελ. 53), ως **αριθμητικά ορίσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών** ένα σύνολο πραγματικών για το οποίο υπάρχει ένας τύπος Φ γραμμένος στη γλώσσα της στοιχειώδους άλγεβρας περιέχων μία ελεύθερη μεταβλητή και τέτοιος, ώστε το A να αποτελείται από ακριβώς εκείνους τους αριθμούς που επαληθεύουν το Φ . Επιπλέον, ως **διαστήματα με αλγεβρικά άκρα** ορίζονται τα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών της μορφής $\{x \in \mathbb{R} : x = a\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ ή $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, όπου τα a, b είναι αυθαίρετοι αλγεβρικοί αριθμοί. Τα $<, >$ ενδέχεται να αντικατασταθούν από τα $\leq, \geq$ ανάλογα με το αν τα σύνολα είναι κλειστά ή ανοικτά. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τους ορισμούς αυτούς είναι εμφανές πλέον ότι το παραπάνω θεώρημα είναι το θεώρημα Tarski-Seidenberg στην ειδική περίπτωση που ο κάθε τύπος Φ έχει μόνο

μία ελεύθερη μεταβλητή.

Το 1939 ο Tarski ετοίμασε μία μονογραφία στην οποία ενσωμάτωνε τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας συνοδευόμενα για πρώτη φορά από απόδειξη. Ο τίτλος αυτής: *The completeness of elementary algebra and geometry*. Θα συμπεριλαμβανόταν σε μία παρισινή μαθηματική συλλογή ονομαζόμενη *Actualités scientifiques et industrielles*, Hermann & Cie. Ωστόσο η έκδοση αυτή ματαιώθηκε, εξ αιτίας του πολέμου. Ειρήσθω εν παρόδω, ό,τι απέμεινε από αυτή την εργασία του Tarski εκδόθηκε πολύ αργότερα σε μία ελαφρώς επεξεργασμένη έκδοση, φέρουσα τον πρωτότυπο τίτλο, από το Centre National De La Recherche Scientifique, Institut Blaise Pascal στο Παρίσι το 1967.

Η καθυστέρηση από το 1939 ως το 1948, οπότε και έγινε τελικά η δημοσίευση όπως προαναφέραμε, οφείλεται αφενός στην απαιτητικότητα του συγγραφέα, ο οποίος με την πάροδο του χρόνου έκρινε ότι η αρχική μονογραφία έχρηζε ολοένα και περισσότερων βελτιώσεων και συμπληρώσεων, αφετέρου στην πολυπλοκότητα της εμπόλεμης και της μεταπολεμικής περιόδου, που είχε ως συνέπεια τη συνεχή αναβολή της αναθεώρησης της εργασίας [3], (σελ. 24).

Στις αρχές του 1948, η RAND Corporation, Santa Monica, California ενδιαφέρθηκε για τα αποτελέσματα και προσφέρθηκε να τα δημοσιεύσει. Η προετοιμασία της εργασίας για δημοσίευση ανατέθηκε στον καθηγητή J. C. C. McKinsey (Stanford University), ο οποίος εκείνο τον καιρό εργαζόταν σε αυτή. Έπειτα από μερικούς μήνες λοιπόν η μονογραφία δημοσιεύθηκε με τίτλο *A decision method for elementary algebra and geometry*. Όπως αναμενόταν, η δημοσίευση αντανάχλούσε μάλλον τα ενδιαφέροντα της RAND Corporation επί των αποτελεσμάτων, παρά αυτά του Tarski. Η RAND Corporation είναι μία εταιρεία που ενδιαφέρεται για πρακτικές εφαρμογές της επιστημονικής έρευνας. Η εικασία του S. Feferman¹ είναι ότι ο McKinsey έπεισε τους “ανωτέρους” του για την αξία που θα είχε η εφαρμογή της αποφαντικής μεθόδου του Tarski στον υπολογισμό βέλτιστων στρατηγικών σε ορισμένες περιπτώσεις της θεωρίας παιγνίων. Εκείνη την εποχή το θέμα αυτό ήταν πολύ προσφιλές στην εταιρεία [13], (σελ. 8).

Επομένως αν δε συνέτρεχε το ενδιαφέρον της RAND Corporation για μία πιθανή εφαρμογή της εργασίας του Tarski, είναι σχεδόν βέβαιο ότι επρόκειτο να καθυστερήσει ακόμα περισσότερο η δημοσίευση του φερώνυμου θεωρήματος.

¹Η εν λόγω εικασία κρίνεται άξια αναφοράς εξ αιτίας της σχέσης του Feferman με τον Tarski. Σημειωτέον ότι ο Tarski τον ευχαριστεί θερμά, μεταξύ άλλων στην [3], (σελ. 25) για τη βοήθειά του στην προετοιμασία της και ότι ο Feferman μαζί με τη σύζυγό του συνέγραψε τη βιογραφία του, ονόματι *Alfred Tarski: Life and Logic*.

1.2.1 Το κίνητρο της έρευνας.

Οι τίτλοι των τριών εργασιών που εμπλέκονται στην ιστορία της δημοσίευσης δείχνουν μία μετατόπιση ενδιαφέροντος με την πάροδο του χρόνου, αρχικά από την ορισσιμότητα συνόλων πραγματικών αριθμών στην πληρότητα της στοιχειώδους άλγεβρας και γεωμετρίας και έπειτα στην επινόηση μίας αποφαντικής μεθόδου για αυτές. Το γεγονός αυτό δημιουργεί μία ασαφή εικόνα για το ακριβές κίνητρο της έρευνας του Tarski. Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα φαίνεται να δίνει το [12] (σελ. 175). Όπως αναφέρεται σε αυτό, το 1930 ο Tarski απέδειξε ότι η θεωρία της στοιχειώδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας που είχε επινοήσει (και θα δούμε αναλυτικότερα στην 1.3.1) επιδέχεται απαλοιφή ποσοδεικτών. Από το θεώρημα αυτό φαίνεται να έπονται ως πορίσματα η πληρότητα, η αποκρισσιμότητα και η συνέπεια της θεωρίας. Επομένως το πιθανότερο είναι ότι το κίνητρο του Tarski ήταν η αναζήτηση των αρετών της θεωρίας του για τη στοιχειώδη Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Εκείνη την εποχή ζητήματα όπως αυτά της πληρότητας και της συνέπειας των μαθηματικών θεωριών ήταν μείζονος σημασίας για τους μαθηματικούς. Σημειωτέον ότι τη δεκαετία του 1920 ξεκίνησε το πρόγραμμα του Hilbert με σκοπό να απαλλάξει τη θεωρία συνόλων από τα παράδοξα που είχαν ανακαλυφθεί σε αυτή και να εξασφαλίσει έτσι τη συνέπεια των κλασσικών μαθηματικών. Το 1930 όμως, ο Gödel έδειξε ότι είναι αδύνατη η ύπαρξη μίας αποφαντικής μεθόδου για μία θεωρία που περιέχει τις προτάσεις της στοιχειώδους θεωρίας αριθμών.² Αποτέλεσμα το οποίο κατέστησε μάταιο το φορμαλιστικό πρόγραμμα και επομένως αναζοπύρωσε το μαθηματικό ενδιαφέρον περί των ζητημάτων αυτών.

1.2.2 Η συνεισφορά του Seidenberg.

Μολονότι ο Tarski ανακάλυψε και απέδειξε το θεώρημα με το οποίο ασχολούμαστε, όπως είναι γνωστό, αυτό φέρει και το όνομα του Seidenberg. Ο Seidenberg ήταν από τους λίγους που ασχολήθηκαν με το αρχικό μονόγραφο του Tarski μετά τη δημοσίευσή του, πιθανότατα λόγω της πολυπλοκότητας και του μακροσκελούς της έκθεσης. Αποτέλεσμα αυτής της ενασχόλησης ήταν η επινόηση μίας νέας, απλούστερης αποφαντικής μεθόδου για τα πραγματικώς κλειστά σώματα, την οποία δημοσίευσε το 1952 σε ένα άρθρο με τίτλο: *A new decision method for elementary algebra*. Περισσότερες λεπτομέρειες για τη μέθοδό του, παραθέτουμε στην παράγραφο 2.1. Η εργασία του Seidenberg κατέστησε πιο εύληπτο το αποτέλεσμα της εργασίας του

² Alfred Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, 1st ed., pp. 2.

Tarski και συνεπώς πιο προσιτό.

1.3 Συνέπειες

1.3.1 Πληρότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Στο [2] ο Tarski προτείνει μία αξιωματικοποίηση της Ευκλείδειας επιπεδομετρίας σε μία γλώσσα με τρεις σχέσεις ερμηνευμένες ως εξής:

$=$: μία διμελής σχέση που δηλώνει ότι δυο σημεία ταυτίζονται,

B : μία τριμελής σχέση που σημαίνει ότι τα τρία σημεία είναι συνευθειακά και το μέσο στοιχείο της διατεταγμένης τριάδας βρίσκεται ενδιάμεσως των δύο άλλων στην ευθεία,

D : μία τεταρμελής σχέση που σημαίνει ότι η απόσταση των δύο πρώτων σημείων της διατεταγμένης τετράδας είναι ίση με την απόσταση των δύο τελευταίων.

Στη γλώσσα αυτή δεν υπάρχουν σταθερές και συναρτησιακά σύμβολα, άρα οι μόνοι όροι είναι οι μεταβλητές. Το αξιωματικό σύστημα περιλαμβάνει δεκαεννέα αξιώματα. Έπειτα επιδεικνύει μία μέθοδο μετατροπής ενός τύπου της γλώσσας αυτής σε έναν τύπο της γλώσσας της στοιχειώδους άλγεβρας. Με αυτό τον τρόπο δημιουργεί μία αποφαντική μέθοδο για την Ευκλείδεια επιπεδομετρία. Γεγονός που αποδεικνύει την αποκρισιμότητα και κατά συνέπεια την πληρότητα της θεωρίας.

Επίσης ισχυρίζεται ότι η αποφαντική μέθοδος για την άλγεβρα των πραγματικών αριθμών μπορεί να επεκταθεί σε άλλα αλγεβρικά συστήματα που βασίζονται στους πραγματικούς αριθμούς, όπως για παράδειγμα η στοιχειώδης άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών, οπότε με τον ίδιο τρόπο η αποφαντική μέθοδος για την Ευκλείδεια επιπεδομετρία μπορεί να επεκταθεί στην Ευκλείδεια γεωμετρία των n διαστάσεων.

1.3.2 Ημιαλγεβρική Γεωμετρία

Ημιαλγεβρικό σύνολο λέγεται ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ το οποίο επαληθεύει έναν μπουλειανό συνδυασμό πολυωνυμικών ισοτήτων και ανισοτήτων στις μεταβλητές $\{x_1, \dots, x_n\}$ με πραγματικούς συντελεστές. Δηλαδή έναν τύπο ελεύθερο ποσοδεικτών, πεπερασμένου μήκους που αποτελείται από συζεύξεις και διαζεύξεις τέτοιων σχέσεων.

Το θεώρημα Tarski-Seidenberg αποτελεί τον αχρογωνιαίο λίθο της ημιαλγεβρικής γεωμετρίας. Δηλαδή της γεωμετρίας των ημιαλγεβρικών συνόλων. Ο Thom [8] εξέφρασε το θεώρημα σε μία ημιαλγεβρική μορφή:

1.3.1 Θεώρημα. [Tarski-Seidenberg] Έστω A ένα ημιαλγεβρικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$ και $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, η προβολή στις πρώτες n μεταβλητές. Τότε το $\pi(A)$ είναι ημιαλγεβρικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Επειδή το A είναι ημιαλγεβρικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$, μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : p(x) = 0 \wedge q_1(x) > 0 \wedge \dots \wedge q_k(x) > 0\},$$

όπου p και q πολυώνυμα στις $n+1$ μεταβλητές με συντελεστές στο $\mathbb{R}$. Οπότε

$$\pi(A) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists x_{n+1} (p(x) = 0 \wedge q_1(x) > 0 \wedge \dots \wedge q_k(x) > 0)\}$$

Από το θεώρημα στην κλασική του μορφή έπεται ότι υπάρχει $B(x_1, \dots, x_n)$, μπου-λειανός συνδυασμός πολυωνυμικών εξισώσεων και ανισώσεων, ώστε $B(x_1, \dots, x_n) \equiv \exists x_{n+1} (p(x) = 0 \wedge q_1(x) > 0 \wedge \dots \wedge q_k(x) > 0)$. Συνεπώς, πράγματι το σύνολο $\pi(A)$ είναι ημιαλγεβρικό. $\square$

Από το πόρισμα αυτό έπεται ότι για κάθε A ημιαλγεβρικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+k}$, η προβολή του στον $\mathbb{R}^n$ είναι ημιαλγεβρικό σύνολο. Αυτό αποδεικνύεται προφανώς με επαγωγή στο k . Από το τελευταίο έπεται ότι αν A ημιαλγεβρικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ μία πολυωνυμική απεικόνιση, τότε το $F(A)$ είναι ημιαλγεβρικό. Το συμπέρασμα συνάγεται από την παρατήρηση ότι το $\{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : x \in A \wedge y = F(x)\}$ είναι ημιαλγεβρικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ οπότε το $F(A)$ είναι η προβολή του στον $\mathbb{R}^n$, άρα ημιαλγεβρικό. Από αυτά τα δύο έπεται το παρακάτω ενδιαφέρον αποτέλεσμα για την κλειστή θήκη ενός ημιαλγεβρικού συνόλου:

1.3.2 Πόρισμα. Η κλειστή θήκη $\bar{A}$ ενός ημιαλγεβρικού υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^n$ είναι ημιαλγεβρικό σύνολο.

Απόδειξη. Η κλειστή θήκη του A είναι

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists y (y \in A \wedge \|x - y\| < \varepsilon))\}.$$

Αυτή είναι δυνατό να γραφεί και ως εξής:

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\pi_1(\{(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \varepsilon > 0\} \mid \pi_2(B)))\},$$

όπου

$$B = \{(x, \varepsilon, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : y \in A \wedge \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2\},$$

$\pi_1(x, \varepsilon) = x$ και $\pi_2(x, \varepsilon, y) = (x, \varepsilon)$. Έχουμε δηλαδή ότι $\text{clos}(A) = \pi_1(\pi_2(B))$. Βλέπουμε ότι το B είναι ημιαλγεβρικό, επομένως από το θεώρημα έπεται ότι και το $\text{clos}(A)$ είναι ημιαλγεβρικό. $\square$

Αυτά είναι μερικά παραδείγματα από ένα πλήθος στοιχειωδών προτάσεων της θεωρίας που απορρέουν από το θεώρημα Tarski-Seidenberg. Εξ αιτίας αυτών δεν θα ήταν υπερβολή να ισχυριστούμε ότι η ημιαλγεβρική γεωμετρία, οι προεκτάσεις της και οι εφαρμογές της φέρουν κατά μία έννοια το στίγμα του θεωρήματος. Η θεωρία αυτή μάλιστα έχει εφαρμογές σε ποικίλα πεδία όπως η οικονομετρία, η ρομποτική, η πληροφορική κ.α. (π.χ. βλέπε [15], [16], [17]).

1.4 Προεκτάσεις

1. Ο L. Van den Dries [6] επεζέτεινε τη μέθοδο απαλοιφής ποσοδεικτών του Tarski σε πραγματικώς κλειστά σώματα με συναρτησιακά σύμβολα για κάποιες υπερβατικές συναρτήσεις, όπως οι $\sin x, \cos x, e^x$, ορισμένες όμως μόνο σε κλειστά διαστήματα. Αυτό σημαίνει ότι ορίζουμε συναρτησιακά σύμβολα $\tilde{f}$ τα οποία ερμηνεύονται κάθε ένα ως κάποια από τις προαναφερθείσες συναρτήσεις, π.χ.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{αν } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Αυτό επιτρέπει και τον ορισμό της συνάρτησης $\arctan x$ σε όλο το $\mathbb{R}$. Μέσω, δηλαδή, του ορισμού της $\tan x$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Προφανώς οι συναρτήσεις $\sin x, \cos x$ δεν είναι δυνατόν να οριστούν σε όλο το $\mathbb{R}$, διότι τότε θα μπορούσαμε να ορίσουμε το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin \pi x = 0\}$, δηλαδή το $\mathbb{Z}$, πράγμα το οποίο αντίκειται στο θεώρημα μη-πληρότητας του Gödel.

2. Ο Wilkie εισήγαγε στη θεωρία των πραγματικώς κλειστών σωμάτων μία εκθετική συνάρτηση. Στην επέκταση αυτή ισχύει ότι κάθε τύπος $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ είναι ισοδύναμος με έναν της μορφής $\exists x \psi(x_1, \dots, x_n)$, όπου ψ είναι ένας τύπος χωρίς ποσοδείκτες. Γεωμετρική εκδοχή: Κάθε ορισμο σύνολο (ειδικότερα το συμπλήρωμα μίας “εκθετικής πολλαπλότητας”) είναι προβολή μίας “εκθετικής πολλαπλότητας”. Η απόδειξη

χρησιμοποιεί μία κατάλληλη παραλλαγή του μοντελοθεωρητικού κριτηρίου του A. Robinson (βλέπε παρ. 2.1.4).

Κεφάλαιο 2

Η απόδειξη του θεωρήματος

2.1 Δυνατές προσεγγίσεις

1. A. Tarski. Ο Tarski προσπάθησε να απαντήσει στο πρόβλημα αποκρισμότητας (decision problem) της στοιχειώδους άλγεβρας των πραγματικών αριθμών¹ με την επινόηση μίας αποφαντικής (ή αποκριτικής) μεθόδου. Η μέθοδός του αποτελείται από δύο μέρη: (1) τη διαδικασία απαλοιφής ποσοδεικτών για κάθε τύπο στον οποίο εμφανίζονται δεσμευμένες μεταβλητές και (2) τη διαδικασία απόφασης για τον εκάστοτε παραγόμενο τύπο. Ο Tarski προβαίνει σε μία λεπτομερέστατη και εκτεταμένη πραγμάτευση του ζητήματος, διακρίνοντας έναν μακροσκελή κατάλογο δυνατών μορφών για τον τυχαίο τύπο και ένα πλήθος αλληπάλληλων τελεστών. Στοιχείο μείζονος σημασίας για τη μέθοδο είναι μία γενικευμένη μορφή του θεωρήματος του Sturm, το θεώρημα Sylvester. Το θεώρημα αυτό δίνει μία μέθοδο απόφασης για έναν τύπο της μορφής “το σύστημα $p(x) = 0 \wedge q_1(x) > 0 \wedge \dots \wedge q_n(x) > 0$ έχει ακριβώς k ρίζες”.

2. A. Seidenberg. Ο Seidenberg προσέγγισε το ζήτημα από την ίδια σκοπιά με τον Tarski, παρουσιάζοντας όμως μία διαφορετική, συντομότερη απόδειξη. Όπως εξηγεί στο [7], (σελ. 365), η μέθοδος που επινοεί στη δική του απόδειξη αποφαινεται για το αν ένα δοσμένο πολυώνυμο δύο μεταβλητών με συντελεστές σε ένα σώμα ρητών αριθμών R έχει ρίζα σε ένα πραγματικώς κλειστό σώμα K που περιέχει το R . Συγκριμένα ο Seidenberg μετατρέπει κάθε μπουλειανό συνδυασμό τύπων σε έναν τύπο με μία πολυωνυμική εξίσωση και έπειτα αποφαινεται για το πλήθος των ριζών του. Η κύρια διαφορά αυτής της μεθόδου σε σχέση με αυτή του Tarski είναι ότι χρησιμοποιεί

¹Ο Tarski αναφέρει τον όρο αυτό στο [2], (σελ. 2), με τον οποίο εννοεί αυτό που ονομάζουμε πραγματικώς κλειστό σώμα.

το θεώρημα του Sturm μόνο μία φορά για την απαλοιφή της τελευταίας μεταβλητής σε έναν τύπο.

3. P. Cohen. Ομοίως με τους δύο προηγούμενους, ο Cohen ασχολήθηκε με το αποφαντικό πρόβλημα και τη δυνατότητα επινόησης μίας αλγοριθμικής διαδικασίας απόφασης για στοιχειώδεις προτάσεις σχετικά με τα πραγματικώς κλειστά και τα p -αδικά σώματα. Ο ίδιος σημειώνει για την ιδιαιτερότητα της δικής του απόδειξης τα εξής: “Η απόδειξή μας, μολονότι χρησιμοποιεί τις ιδέες που βρίσκονται στην απόδειξη του θεωρήματος του Sturm, προχωρά απ’ ευθείας με μία επαγωγή στο θεώρημα καθ’αυτό” [10] (σελ. 132). Επιπλέον εισάγει το συμβολισμό $\operatorname{sgn} x = -1, 0, 1$ για $x < 0$, $x = 0$ ή $x > 0$ αντίστοιχα.

4. A. Robinson. Ο A. Robinson [9] (βλέπε επίσης [14]) επιχείρησε μία μοντελοθεωρητική προσέγγιση στο θεώρημα με σκοπό να γενικεύσει το αποτέλεσμα της δυνατότητας απαλοιφής ποσοδεικτών σε θεωρίες εκπεφρασμένες σε γλώσσα που περιέχει τουλάχιστον μία σταθερά. Θυμίζουμε ότι η γλώσσα της θεωρίας των πραγματικώς κλειστών σωμάτων, την οποία μελετάμε, περιέχει δύο σταθερές, το 0 και το 1. Η απόδειξη που κατόρθωσε ο Robinson βασίζεται στο θεώρημα του συμπαγούς. Απέδειξε ότι για κάθε τύπο υπάρχει ισοδύναμος ελεύθερος ποσοδεικτών, χωρίς όμως να υποδείξει κάποια μέθοδο απαλοιφής ποσοδεικτών.

2.2 Πλήθος ριζών πολυωνύμου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σημαντικό ρόλο στην απόδειξη παίζει η κλασική θεωρία του Sturm για το πλήθος των διακεκριμένων ριζών πολυωνύμων μέσα σε ένα διάστημα. Για την ακρίβεια η παρακάτω γενικότερη εκδοχή του θεωρήματος του Sturm που οφείλεται στον Sylvester. Για το λόγο αυτό και επειδή επιπλέον η απόδειξη που θα εκθέσουμε στην παράγραφο 2.3 ακολουθεί σε γενικές γραμμές την προσέγγιση του Tarski, κρίνεται σκόπιμη η παρουσίαση αυτών των προτασεων.

2.2.1 Θεώρημα. [Sylvester] Έστω K ένα πραγματικώς κλειστό σώμα και $\leq$ μία σχέση ολικής διάταξης επί του K . Έστω p και q δύο πολυώνυμα με συντελεστές στο K και a και b ($a < b$) στοιχεία του $K \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ τα οποία δεν είναι ρίζες

του p . Έστω η ακολουθία πολυωνύμων $\{h_1, h_2, \dots, h_s\}$ με

$$\begin{aligned} h_1(x) &= p(x) \\ h_2(x) &= p'q(x) \\ h_3(x) &= -\text{rem}(h_1, h_2) = h_2(x)g_1(x) - h_1(x) \\ h_4(x) &= -\text{rem}(h_2, h_3) = h_3(x)g_2(x) - h_2(x) \\ &\vdots \\ h_s(x) &= -\text{rem}(h_{s-2}, h_{s-1}) \end{aligned}$$

τέτοια, ώστε $\text{rem}(h_{s-1}, h_s) = 0$. Ισχύει ότι:

$$\sigma(a) - \sigma(b) = c_+(p, q : a, b) - c_-(p, q : a, b), \quad \text{όπου}$$

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= \text{card}\{i \in \{1, \dots, s-1\} \mid h_i(u)h_{i+1}(u) < 0\} \\ c_+(p, q : a, b) &= \text{card}\{u \in K \mid p(u) = 0, q(u) > 0, a < u < b\}, \\ c_-(p, q : a, b) &= \text{card}\{u \in K \mid p(u) = 0, q(u) < 0, a < u < b\}. \end{aligned}$$

Σχόλιο: Στην κλασική του μορφή το θεώρημα αναφέρεται σε πολυώνυμα p και q τέτοια, ώστε το p να μην έχει πολλαπλή ρίζα ή κοινή ρίζα με το q . Παρ' όλα αυτά, όπως αποδεικνύεται στο [11], ο περιορισμός αυτός δεν είναι αναγκαίος. Στην απόδειξη που ακολουθεί τον υιοθετούμε χάριν απλότητας της έκθεσης.

Απόδειξη. Αρχίζουμε με τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Δύο οποιαδήποτε h_i, h_{i+1} της ακολουθίας δεν έχουν κοινή ρίζα, διότι αν είχαν, τότε αυτή θα ήταν κοινή για όλα τα πολυώνυμα της ακολουθίας, κάτι το οποίο αντίκειται στην υπόθεση.
- Αν ξ είναι ρίζα κάποιου h_i , τότε τα $h_{i-1}h_{i+1}$ είναι ετερόσημα στο ξ . Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση $h_{i-1}(\xi) = h_i(\xi)\pi_i(\xi) - h_{i+1}(\xi) = -h_{i+1}(\xi)$.
- Αν ξ είναι ρίζα κάποιου εκ των $h_2, \dots, h_s$ και $\sigma_s^2(\xi^-), \sigma_s^2(\xi^+)$ το πλήθος των εναλλαγών προσήμων της ακολουθίας $h_2, \dots, h_s$ κατά τι αριστερά και κατά τι δεξιά του ξ αντιστοίχως, τότε $\sigma_s^2(\xi^-) = \sigma_s^2(\xi^+)$.

Πράγματι, αν ξ είναι η ρίζα ενός h_i της ακολουθίας αυτής, τότε από την υπόθεση θα συντελεστεί αλλαγή προσήμων μεταξύ των $h_i(\xi^-), h_i(\xi^+)$. Από την πρώτη

Πίνακας 2.1: Εναλλαγές προσήμων σε μία τυχαία ρίζα ξ του p

	$p'(\xi) < 0$	$p'(\xi) > 0$
$q(\xi) > 0$	$\frac{h_1}{h_2} \left \begin{array}{c c} + & - \\ - & - \end{array} \right $	$\frac{h_1}{h_2} \left \begin{array}{c c} - & + \\ + & + \end{array} \right $
$q(\xi) < 0$	$\frac{h_1}{h_2} \left \begin{array}{c c} + & - \\ + & + \end{array} \right $	$\frac{h_1}{h_2} \left \begin{array}{c c} - & + \\ - & - \end{array} \right $

παρατήρηση έπεται ότι δεν είναι ρίζα κανενός εκ των h_{i-1}, h_{i+1} και από τη δεύτερη ότι και τα δύο διατηρούν σταθερό πρόσημο γύρω από το ξ . Οπότε, αν συντελείται αλλαγή προσήμων μεταξύ των $h_i(\xi^-), h_{i+1}(\xi^-)$, λόγω συνέχειας θα συντελείται αλλαγή προσήμων μεταξύ των $h_{i+1}(\xi^+), h_i(\xi^+)$. Το ίδιο ισχύει και για τις τιμές $\sigma(\xi^+), \sigma(\xi^-)$ των εναλλαγών προσήμων της $\{h_1, h_2, \dots, h_s\}$, όταν το ξ δεν είναι ρίζα του h_1 .

Επομένως μεταβολές στη διφορά τιμών $\sigma(\xi^-) - \sigma(\xi^+)$ μπορούν να συντελεστούν μόνο σε ρίζες ξ του $h_1 = p$. Αν λοιπόν $p(\xi) = 0$, από την υπόθεση ότι τα p και $p'q$ δεν έχουν κοινές ρίζες, ισχύει ότι $p'(\xi) \neq 0, q(\xi) \neq 0$ και η παράγωγος p' θα διατηρεί το πρόσημο γύρω από το ξ . Αν $p(\xi^-) > 0$, τότε $p'(\xi) < 0$ και αν $p(\xi^-) < 0$, τότε $p'(\xi) > 0$. Άρα έχουμε ότι $\sigma(\xi^-) - \sigma(\xi^+) = 1$ όταν $q(\xi) > 0$ και $\sigma(\xi^-) - \sigma(\xi^+) = -1$ όταν $q(\xi) < 0$. Συνεπώς, καθώς το u διατρέχει αυξανόμενο το διάστημα (a, b) , το $\sigma(u)$ μειώνεται κατά μία μονάδα καθώς διέρχεται από ξ με $q(\xi) > 0$ και αυξάνεται κατά μία μονάδα όταν διέρχεται από ξ με $q(\xi) < 0$, όπως φαίνεται και από τον πίνακα 2.1. Δηλαδή ισχύει πράγματι ότι $\sigma(b) = \sigma(a) - c_+(p, q : a, b) + c_-(p, q : a, b)$.

□

Παρατηρούμε ότι το πλήθος εναλλαγών προσήμων της ακολουθίας $\{h_1, h_2, \dots, h_s\}$ που ορίζεται στην εκφώνηση του θεωρήματος Θεώρημα 2.2.1 για μία τιμή, έστω u , περιγράφεται από έναν τύπο ελεύθερο ποσοδεικτών. Δηλαδή αν $\sigma(u) = n$, τότε ο τύπος αυτός αναλύεται σε μία διάζευξη ενδεχομένων για τις “θέσεις” των n εναλλαγών προσήμων στην ακολουθία $\{h_1(u), h_2(u), \dots, h_s(u)\}$. Κάθε ενδεχόμενο είναι μία σύζευξη από συγκεκριμένες εναλλαγές προσήμων, κάθε μία εκ των οποίων περιγράφεται από έναν τύπο της μορφής $p_i(R)p_{i+1}(R) < 0$. Η αξία της παρατήρησης αυτής φαίνεται στην επόμενη παράγραφο.

Όπως αναφέρεται στην αρχή της παραγράφου, το θεώρημα Sturm είναι ειδική περίπτωση του προηγούμενου θεωρήματος. Συγκεκριμένα προκύπτει ως πόρισμα του

προηγούμενου, αν στην ακολουθία πολυωνύμων που ορίσαμε στο θεώρημα επιλέξουμε να είναι $q(x)$ το σταθερό πολυώνυμο 1.

2.2.2 Θεώρημα. [Sturm] Έστω ένα πολυώνυμο $p(x)$ με πραγματικούς συντελεστές και η ακολουθία πολυωνύμων

$$\begin{aligned} p_0(x) &= p(x) \\ p_1(x) &= p'(x) \\ p_2(x) &= -\text{rem}(p_0, p_1) = p_1(x)q_0(x) - p_0(x) \\ p_3(x) &= -\text{rem}(p_1, p_2) = p_2(x)q_1(x) - p_1(x) \\ &\vdots \\ p_m(x) &= -\text{rem}(p_{m-2}, p_{m-1}) \end{aligned}$$

τέτοια, ώστε $\text{rem}(p_{m-1}, p_m) = 0$. Για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών a, b τέτοιων, ώστε $a < b$ ισχύει ότι το πλήθος των διακεκριμένων ριζών του πολυωνύμου $p(x)$ στο διάστημα (a, b) ισούται με $\sigma(a) - \sigma(b)$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία που περιγράφεται στο θεώρημα ορίζεται μονοσήμαντα για κάθε πολυώνυμο $p(x)$. Η ακολουθία αυτή ονομάζεται κανονική ακολουθία Sturm του πολυωνύμου $p(x)$.

2.3 Η απόδειξη

2.3.1 Θεώρημα. [Tarski-Seidenberg] Η θεωρία των πραγματικώς κλειστών σωμάτων επιδέχεται απαλοιφή ποσοδευτικών στη γλώσσα $L = \{+, -, \cdot, 0, 1, \leq\}$.

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε τύπο της θεωρίας αυτής, γραμμένο στην L , στον οποίο εμφανίζονται κάποιες δεσμευμένες μεταβλητές υπάρχει ένας ισοδύναμος τύπος χωρίς ποσοδείκτες.

Ξεκινάμε με μια σειρά αναγωγών που θα μας οδηγήσουν στην απλούστερη δυνατή μορφή του τυχαίου εξεταζόμενου τύπου. Κατ' αρχάς υπενθυμίζεται ότι για κάθε τύπο φ

1. υπάρχει ένας τύπος φ' ελεύθερος ποσοδευτικών τέτοιος ώστε

$$\varphi \equiv Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi',$$

όπου Q_i είναι υπαρξιακός ή καθολικός ποσοδείκτης,

2. ισχύει ότι $\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$.

Άρα με επαγωγή στο πλήθος των ποσοδεικτών είναι προφανές ότι αρκεί να αποδειχθεί η πρόταση για έναν τύπο της μορφής $\exists x\varphi$, όπου ο φ είναι ελεύθερος ποσοδεικτών. Αφού ο φ είναι ελεύθερος ποσοδεικτών, γράφεται σε διαζευκτική κανονική μορφή, δηλαδή ως διάζευξη συζεύξεων ατομικών τύπων.

Έχουμε επομένως ότι

$$\exists x\varphi \equiv \exists x\left(\bigvee_{i=1}^n \varphi_i\right) \equiv \bigvee_{i=1}^n \exists x\varphi_i,$$

όπου τα φ_i είναι συζεύξεις ατομικών τύπων άρα αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $\exists x\varphi$, όπου ο φ είναι σύζευξη ατομικών τύπων. Πιο συγκεκριμένα για τη μορφή του φ , παρατηρώντας ότι, αφενός κάθε τύπος της μορφής $q(x) < 0$ μπορεί να γραφεί ως $-q(x) > 0$, αφετέρου

$$\bigwedge_{i=1}^n p_i(x) = 0 \equiv \sum_{i=1}^n p_i^2(x) = 0,$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\exists x\varphi \equiv \exists x(p(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^r q_j(x) > 0).$$

Ο τελευταίος τύπος είναι ισοδύναμος με τον

$$\exists_1 x(p(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^r q_j(x) > 0) \vee \exists_2 x(\dots) \vee \dots \vee \exists_m x(\dots),$$

όπου $m = \deg(p(x))$. Οι (...) συμβολίζουν παρενθέσεις πανομοιότυπες με την πρώτη και με τον κάθε ποσοδείκτη $\exists_i$ εννοούμε ότι υπάρχουν ακριβώς i πλήθους αντικείμενα. Είναι προφανές ότι μόνο ένας από τους τύπους της παραπάνω διάζευξης αληθεύει, οπότε ισχύει ότι

$$\exists x\varphi \equiv \exists_k x(p(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^r q_j(x) > 0),$$

όπου k είναι το ακριβές πλήθος ριζών του $p(x)$ για τις οποίες όλα τα $q(x)$ παίρνουν θετική τιμή.

Διακρίνουμε τώρα τρεις περιπτώσεις για τη μορφή του παραπάνω τύπου και μελετάμε τον καθένα ξεχωριστά.

$$(i) \quad \exists_k x \varphi \equiv \exists x (p(x) = 0)$$

Αρχικά βρίσκουμε ένα διάστημα μέσα στο οποίο βρίσκονται όλες οι ρίζες του πολυωνύμου. Παρατηρούμε ότι αν $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, τότε το p έχει τις ίδιες ρίζες με το $\rho(x) = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, όπου $b_i = \frac{a_i}{a_n}$. Αν θέσουμε

$$R = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |b_k|,$$

τότε για κάθε x για το οποίο ισχύει ότι $|x| > R > 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\rho(x)| &\geq |x^n| - |b_{n-1}| |x|^{n-1} - \dots - |b_1| |x| - |b_0| \\ &\geq |x|^n - (|b_{n-1}| + \dots + |b_1| + |b_0|) |x|^{n-1} \\ &\geq |x|^{n-1} (|x| - (R - 1)) \geq |x|^{n-1} > R^{n-1} \\ &\geq R, \end{aligned}$$

άρα το $\rho(x)$ και κατά συνέπεια το $p(x)$ δεν έχει ρίζες εκτός του διαστήματος $(-R, R)$. Έστω $\{p_0(x), p_1(x), \dots, p_l(x)\}$ η κανονική ακολουθία Sturm του πολυωνύμου $p(x)$. Επειδή $\deg(p(x)) = n$, έπεται ότι $1 \leq l \leq n$. Θέτουμε $\sigma(x)$ τη συνάρτηση που απεικονίζει κάθε τιμή του x στο πλήθος των εναλλαγών προσήμων της ακολουθίας Sturm του $p(x)$ για την τιμή αυτή. Από τα παραπάνω και από το θεώρημα του Sturm έπεται ότι

$$\sigma(-R) - \sigma(R) = k.$$

Παρατηρούμε ακόμα ότι εξ ορισμού $0 \leq \sigma(x) \leq l$. Από τις δύο σχέσεις συμπεραίνουμε ότι $k \leq \sigma(-R) \leq l$ και $0 \leq \sigma(R) \leq l - k$. Αναλυτικότερα έχουμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα: η ακολουθία να αλλάζει πρόσημο

k φορές στο $-R$ και καμία φορά στο R , ή

$k + 1$ φορές στο $-R$ και 1 φορά στο R , ή

$\vdots$

l φορές στο $-R$ και $l - k$ φορές στο R .

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο αρχικός τύπος μετατρέπεται έτσι σε μία διάζευξη ενδεχομένων, εκ των οποίων κάθε ένα εκφράζεται με μία σύζευξη της μορφής $\sigma(-R) = a \wedge \sigma(R) = b$, για κάποιους ακεραίους a και b με τις προαναφερθείσες ιδιότητες.

Οι δύο τύποι της σύζευξης είναι ελεύθεροι ποσοδεικτών, όπως παρατηρήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, οπότε εν τέλει και ο $\sigma(-R) - \sigma(R) = k$ είναι ελεύθερος ποσοδεικτών. Επομένως το θεώρημα αποδείχθηκε σε αυτή την περίπτωση.

(ii) Η επόμενη περίπτωση που θα μελετήσουμε είναι η

$$\exists x \varphi \equiv \exists_k x (p(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^r q_j(x) > 0).$$

Για την ακρίβεια θα δείξουμε ότι η μελέτη αυτής ανάγεται στη μελέτη της περίπτωσης όπου $r = 1$. Η αναγωγή αυτή επιτυγχάνεται με μία διαδικασία μείωσης του πλήθους των ανισώσεων. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τους παρακάτω αριθμούς:

r_1 το πλήθος των ριζών του p για τις οποίες $q_1, \dots, q_{r-2}, q_{r-1} > 0$ και $q_r \neq 0$,
 r_2 το πλήθος των ριζών του p για τις οποίες $q_1, \dots, q_{r-2}, q_r > 0$, και $q_{r-1} \neq 0$,
 r_3 το πλήθος των ριζών του p για τις οποίες $q_1, \dots, q_{r-2} > 0$ και $q_{r-1} \cdot q_r < 0$,
 r_4 το πλήθος των ριζών του p για τις οποίες $q_1, \dots, q_{r-2}, q_{r-1} > 0$ και $q_r < 0$,
 r_5 το πλήθος των ριζών του p για τις οποίες $q_1, \dots, q_{r-2}, q_r > 0$ και $q_{r-1} < 0$.
 Από τα παραπάνω έπονται με προφανή τρόπο οι ισότητες

$$k = r_1 + r_4, \quad k = r_2 + r_5, \quad r_3 = r_4 + r_5.$$

Από αυτές με απαλοιφή των r_4 και r_5 συνάγεται ότι

$$2k = r_1 + r_2 - r_3.$$

Παρατηρούμε ακόμα ότι εξ ορισμού $0 \leq r_1, r_2, r_3 \leq \deg(p)$. Επομένως για κάθε μία από τις πεπερασμένου πλήθους δυνατές τιμές του k (υπενθυμίζεται ότι $k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq \deg(p)$) έχουμε πεπερασμένο πλήθος ενδεχόμενων διατεταγμένων τριάδων (r_1, r_2, r_3) τέτοιων ώστε να ικανοποιείται η τελευταία ισότητα. Η λογική διάζευξη όλων των πιθανών ενδεχομένων για τις τιμές των r_1, r_2, r_3 είναι λογικά ισοδύναμη με τον τύπο που μελετάμε και κάθε ενδεχόμενο περιγράφεται με τη λογική σύζευξη τριών τύπων, τους οποίους εξηγούμε παρακάτω. Δηλαδή έχουμε ότι

$$\exists_k x (p(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^r q_j(x) > 0) \equiv \bigvee_{(r_1, r_2, r_3)} (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)$$

όπου

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\equiv \exists_{r_1} x (a(x) = 0 \wedge q_1(x) > 0 \wedge \dots \wedge q_{r-2}(x) > 0 \wedge q_{r-1}(x) q_r^2(x) > 0), \\ \varphi_2 &\equiv \exists_{r_2} x (a(x) = 0 \wedge q_1(x) > 0 \wedge \dots \wedge q_{r-2}(x) > 0 \wedge q_{r-1}^2(x) q_r(x) > 0), \\ \varphi_3 &\equiv \exists_{r_3} x (a(x) = 0 \wedge q_1(x) > 0 \wedge \dots \wedge q_{r-2}(x) > 0 \wedge (-1) q_{r-1}(x) q_r(x) > 0).\end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι οι φ_1, φ_2 , και φ_3 έχουν $r - 1$ ανισώσεις. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για κάθε έναν από τους φ_1, φ_2 , και φ_3 . Με αυτό τον τρόπο, “ενοποιώντας” δηλαδή τις δύο τελευταίες κάθε φορά ανισώσεις σε μία, αυξάνουμε αφενός τους επιμέρους τύπους, αφετέρου μειώνουμε σταδιακά τις ανισώσεις. Συνεχίζοντας τη διαδικασία αυτή φτάνουμε σε τύπους της μορφής $\exists_k x (p(x) = 0 \wedge q(x) > 0)$. Διευκρινίζεται ότι τα k στους τελικούς τύπους είναι εν γένει διάφορα μεταξύ τους.

(iii) $\exists_k x (p(x) = 0 \wedge q(x) > 0)$ Κατ’ αρχάς βρίσκουμε διάστημα (a, b) μέσα στο οποίο βρίσκονται οι ρίζες του p , με τον τρόπο που υποδεικνύεται στην περίπτωση (i). Ονομάζουμε

$$\begin{aligned}r_1 &= \text{card}\{u \in R \mid p(u) = 0, a < u < b\} \\ r_2 &= \text{card}\{u \in R \mid p(u) = 0, q(u) = 0, a < u < b\} \\ r_3 &= c_+(p, q : a, b) - c_-(p, q : a, b) \\ r_4 &= c_-(p, q : a, b)\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έπονται με προφανή τρόπο οι ισότητες

$$r_1 - r_2 = k + r_4, \quad r_3 = k - r_4.$$

Από αυτές με απαλοιφή του r_4 συνάγεται ότι

$$2k = r_1 - r_2 + r_3.$$

Παρατηρούμε ακόμα ότι εξ ορισμού $0 \leq r_1, r_2 \leq \deg(p)$ και $-\deg(p) \leq r_3 \leq \deg(p)$. Επομένως για κάθε μία από τις πεπερασμένου πλήθους δυνατές τιμές του k έχουμε πεπερασμένο πλήθος ενδεχόμενων διατεταγμένων τριάδων (r_1, r_2, r_3) . Για

μία τυχαία τριάδα (r_1, r_2, r_3) ισχύει εξ ορισμού των r_1, r_2 και r_3 ότι

$$\exists_{r_1} x(q(x) = 0), \quad \exists_{r_2} x(p^2(x) + q^2(x) = 0), \quad r_3 = c_+(p, q : a, b) - c_-(p, q : a, b).$$

Από το θεώρημα Sturm έπεται ότι ο πρώτος τύπος είναι ισοδύναμος με έναν τύπο της μορφής $\sigma_1(a) - \sigma_1(b) = r_1$. Ομοίως ο δεύτερος τύπος είναι ισοδύναμος με έναν της μορφής $\sigma_2(a) - \sigma_2(b) = r_2$. Ο τρίτος σύμφωνα με το θεώρημα Sylvester είναι ισοδύναμος και αυτός με έναν τύπο της μορφής $\sigma_3(a) - \sigma_3(b) = r_3$. Εν ολίγοις ο αρχικός τύπος που εξετάζουμε εδώ είναι ισοδύναμος με έναν της μορφής

$$\bigvee_k \left(\bigvee_{(r_1, r_2, r_3)} (\sigma_1(a) - \sigma_1(b) = r_1 \wedge \sigma_2(a) - \sigma_2(b) = r_2 \wedge \sigma_3(a) - \sigma_3(b) = r_3) \right).$$

Έχουμε εξηγήσει στην περίπτωση (i) ότι οι τρεις ισότητες του παραπάνω τύπου μπορούν να γραφούν ως τύποι ελεύθεροι ποσοδεικτών, οπότε το θεώρημα αποδείχθηκε και σε αυτή την περίπτωση. $\square$

2.3.2 Πόρισμα. *Η θεωρία των πραγματικώς κλειστών σωμάτων είναι αποκρίσιμη (άρα και πλήρης).*

Απόδειξη. Κάθε πρόταση της θεωρίας των πραγματικώς κλειστών σωμάτων μετατρέπεται μέσω μίας αποτελεσματικής μεθόδου σε μία ισοδύναμη πρόταση η οποία περιέχει μόνο τις σταθερές 0 και 1. Άρα γνωρίζουμε κατά πόσο αληθεύει ή όχι. $\square$

Κεφάλαιο 3

Έρευνα

Εισαγωγή

Όπως είδαμε μέχρι τώρα, το θεώρημα Tarski-Seidenberg και τουλάχιστον η πρώτη απόδειξή του βασίζεται σε κάποια αποτελέσματα της θεωρίας πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Στοιχειώδεις προτάσεις της θεωρίας αυτής υπάρχουν στη διδακτέα ύλη της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, ενώ πιο προχωρημένα αποτελέσματά της παρουσιάζουν πληθώρα εφαρμογών σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους. Επομένως είναι απαραίτητη η επαρκής κατάρτιση των φοιτητών ενός τμήματος μαθηματικών - μελλοντικών καθηγητών μαθηματικών, σε ζητήματα της θεωρίας αυτής.

Στο πλαίσιο της εργασίας διεξήχθη μία έρευνα με φοιτητές¹ του τμήματος, με κεντρικό σκοπό να εκτιμηθούν η γνωστική τους επάρκεια, οι ανάγκες και τα ενδεχόμενα οφέλη από τον εμπλουτισμό του προγράμματος σπουδών τους με θέματα που άπτονται θεωρίας πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Προκειμένου για την εκτίμηση αυτή, οργανώθηκε μία ερευνητική διαδικασία με επιμέρους σκοπούς τη διερεύνηση:

1. του γνωστικού επιπέδου σε θέματα πολυωνύμων μίας μεταβλητής δευτέρου και τρίτου βαθμού,
2. της αντίληψης της έννοιας του πολυωνύμου δύο μεταβλητών,
3. της διαίσθησης των φοιτητών σχετικά με απλά ζητήματα προβολών σχημάτων που ορίζονται από πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις σε επίπεδα.

¹Γράφοντας “φοιτητές” εννοούμε φοιτητές και/ή φοιτήτριες. Ας μας επιτραπεί αυτή η σύμβαση για λόγους συντομίας αλλά και άγνοιας του φύλου καθενός και καθεμίας, εξ αιτίας της ανωνυμίας που τηρήθηκε κατά τη διεξαγωγή του πειράματος.

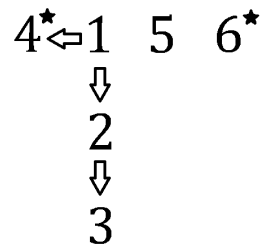
Πέραν των σκοπών αυτών εξετάζονται επίσης:

1. ο τρόπος αντιμετώπισης προβλημάτων αυτού του είδους από τους φοιτητές,
2. η αντίληψη της έννοιας της ισοδύναμης συνθήκης.

Ο χαρακτήρας της έρευνας είναι κυρίως διαγνωστικός. Δεν έχει σκοπό να επιβεβαιώσει ή να διαψεύσει κάποια θεωρία. Η έρευνα αφορούσε στη διανομή ενός ερωτηματολογίου προς απάντηση, σε φοιτητές του τμήματος. Η συμμετοχή των φοιτητών ήταν εθελοντική και ανώνυμη, γεγονός που καθιστούσε ανέφικτη τη διεξαγωγή συνεντεύξεων για διευκρινιστικές ερωτήσεις προς τους φοιτητές σχετικά με τις απαντήσεις τους. Το γεγονός αυτό καθιστά το ερωτηματολόγιο το μόνο μέσο διερεύνησης του πειράματος.

Ερωτηματολόγιο

Το εν λόγω ερωτηματολόγιο αποτελείται από 6 κυρίως ερωτήματα, ορισμένα εκ των οποίων απαρτίζονται από επιμέρους υποερωτήματα. Τα ερωτήματα είναι δομημένα με συνοχή και κλιμακωτή δυσκολία. Η δομή του ερωτηματολογίου περιγράφεται διαγραμματικά στο Σχήμα 3.1. Οι ασκήσεις, οι σεσημασμένες με άστρο κρίθηκαν από



Σχήμα 3.1: Η δομή του ερωτηματολογίου.

την ερευνητική ομάδα δυσκολότερες από τις υπόλοιπες. Οι ερωτήσεις είναι αυτές:

1. Έστω πολυώνυμο $q(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$.
 - (α') Για ποιές τιμές των a_i το πολυώνυμο έχει πραγματικές ρίζες;
 - (β') Αν ξ_i οι πραγματικές ρίζες, να εκφραστούν συναρτήσει των a_i .
 - (γ') Αληθεύει ότι $(\forall x)(x^2 - 3x + 4 > 0)$;

- (δ') Δώστε μία συνθήκη για τα a_i ισοδύναμη με την $(\forall x)(a_2x^2 + a_1x + a_0 > 0)$.
- (ε') Δώστε μία συνθήκη για τα a_i ισοδύναμη με την $(\exists x)(a_2x^2 + a_1x + a_0 > 0)$.
2. Έστω $q(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x - \frac{5}{8}$
Έχει πραγματική ρίζα το πολυώνυμο αυτο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
3. Έστω πολυώνυμο $q(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$, $a_3 \neq 0$.
- (α') Για ποιές τιμές των a_i το πολυώνυμο έχει πραγματικές ρίζες;
- (β') Γνωρίζετε αν υπάρχει αναλυτικός τύπος γι' αυτές;
- (γ') Για ποιες τιμές των a_i ισχύει ότι $(\exists x)(q(x) > 0)$;
- (δ') Για ποιες τιμές των a_i ισχύει ότι $(\forall x)(q(x) > 0)$;
- (ε') Δώστε μία συνθήκη για τα a_i ισοδύναμη με την $(\exists x)(q(x) > 0)$.
- (ε') Δώστε μία συνθήκη για τα a_i ισοδύναμη με την $(\forall x)(q(x) > 0)$.
4. Δώστε μία συνθήκη για τα λ και μ ισοδύναμη με την ακόλουθη

$$(\exists x)[(\lambda x^2 + \mu x - 2 = 0) \wedge (-x^2 + 2\mu x - 3\lambda > 0)]$$

5. Ποια από τα παρακάτω δεν είναι πολυώνυμα 2 μεταβλητών;
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(α') $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$

(β') $ax_1^2 + \frac{b}{x_2^2} + x_1$

(γ') $-\sqrt{2}x_1 + 10x_2^4$

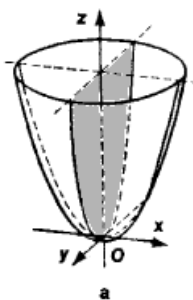
(δ') $\frac{x_2}{3} + \frac{\pi}{2}\sqrt{x_1^3}$

6. Έστω η επιφάνεια $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$

(α') Για ποια ζεύγη τιμών (x, y) ισχύει ότι $(\exists z)(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0)$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(β') Μπορεί το σύνολο Π των σημείων της προβολής στο yOz να περιγραφεί ως $\Pi = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid g(y, z) \geq 0 \text{ ή } g(y, z) \leq 0\}$ για κάποια κατάλληλη συνθήκη $g(y, z)$;

Στον Πίνακα 3.1 δηλώνεται ο ειδικός σκοπός κάθε ερωτήματος.



Πίνακας 3.1: Ο ειδικός σκοπός κάθε ερωτήματος.

Ερώτημα	Σκοπός
1α', 1β', 1γ'	Τετριμμένα ερωτήματα, αναγνωριστικά πρωτίστως της συγκέντρωσης και δευτερευόντος του επιπέδου του φοιτητή.
1δ'	Ζητείται γενίκευση της απάντησης του ερωτήματος 1γ' και διερευνάται η αντίληψη της ισοδύναμης συνθήκης.
1ε'	Διερεύνηση τρόπου αντιμετώπισης προβλήματος καθώς και της προαναφερθείσας αντίληψης.
2.	Διερεύνηση τρόπου αντιμετώπισης ενός εύκολου προβλήματος ανάλυσης επιπέδου Γ' Λυκείου. Επιπλέον το ερώτημα αυτό λειτουργεί ως βοηθητικό για το επόμενο.
3α'	Διερεύνηση του τρόπου αντιμετώπισης ενός ελαφρώς δυσκολότερου προβλήματος (η σχετική δυσκολία του έγγυται στην παρουσία αφηρημένων συντελεστών), καθώς και της ικανότητας γενίκευσης του αποτελέσματος του προηγούμενου ερωτήματος.
3β'	Ερώτηση γνώσης.
3γ', 3δ'	Διερεύνηση ικανότητας συμπερασμού (οι απαντήσεις έπονται του 3α').
3ε', 3ς'	Διερεύνηση της αντίληψης της ισοδύναμης συνθήκης. Ζητείται ταυτολογία και αντιλογία αντίστοιχα.
4.	Διερεύνηση τρόπου αντιμετώπισης προβλήματος. Παράδειγμα ενός συστήματος στο οποίο αναφέρεται το θεώρημα Tarski-Seidenberg. Επίσης διερεύνηση της αντίληψης της ισοδύναμης συνθήκης. Το δυσκολότερο πρόβλημα του ερωτηματολογίου!
5.	Διερεύνηση της αντίληψης της έννοιας του πολυωνύμου δύο μεταβλητών.
6α', 6β'	Διερεύνηση της διαίσθησης των φοιτητών σχετικά με την προβολή ενός τετριμμένου αλγεβρικού συνόλου πάνω σε ένα επίπεδο.

3.1 Διεξαγωγή της έρευνας

Γενικά

Το ερωτηματολόγιο διανεμήθηκε στα δύο τμήματα του προπτυχιακού υποχρεωτικού μαθήματος 4ου εξαμήνου Πραγματική Ανάλυση 4, την ώρα μίας μονώρης διάλε-

Πίνακας 3.2: Συνθήκες διεξαγωγής του πειράματος.

	1η διανομή	2η διανομή
Ημερομηνία:	Παρασκευή 26/4/2013	Παρασκευή 17/5/2013
Ώρα:	10.15-11.15	10.15-11.15
Τόπος:	ΑΘΕ 1	ΑΘΕ 12
Παρόντες φοιτητές:	7	60-70
Εθελοντές:	5	38
Σοβαρή ενασχόληση:	5	11

ξης του μαθήματος. Η παρακολούθηση του μαθήματος δεν είναι υποχρεωτική. Τις διαλέξεις παρακολουθούν φοιτητές τουλάχιστον και κυρίως 2ου έτους.

Λεπτομέρειες

Στον πίνακα 3.2 δίνονται πληροφορίες για τις συνθήκες διεξαγωγής της έρευνας. Ο αριθμός των παρόντων φοιτητών στη δεύτερη διανομή δεν κατέστη εφικτό να υπολογιστεί ακριβώς, εξ ου το εύρος τιμών στον πίνακα. Η ανάγκη του μεγέθους “σοβαρή ενασχόληση” προέκυψε, όπως φαίνεται από τους αριθμούς, κατά τη δεύτερη διανομή, προκειμένου να περιγράψει το εξής συμβάν: υπήρξαν εικοσιεπτά φοιτητές οι οποίοι, ενώ δήλωσαν ενδιαφέρον συμμετοχής και έλαβαν το ερωτηματολόγιο για να απαντήσουν, εντούτοις μετανόησαν και εγκατέλειψαν την προσπάθεια εντός δεκαπέντε το πολύ λεπτών από την έναρξη της διαδικασίας χωρίς να απαντήσουν σε κανένα ερώτημα. Η συμπεριφορά αυτή είναι προφανώς απόρροια του τρόπου με τον οποίο οι συγκεκριμένοι φοιτητές - ερευνώμενα υποκείμενα ερμήνευσαν τις “προθέσεις” του ερευνητή [1],(σελ.174).

Διαδικασία 1ης διανομής

Η ερευνητική ομάδα επισκέφθηκε το αμφιθέατρο χωρίς να έχουν προειδοποιηθεί οι φοιτητές για τη διεξαγωγή της έρευνας. Πριν τη διανομή των ερωτηματολογίων ανακοινώθηκε στους φοιτητές ότι το ερωτηματολόγιο αφορά σε ασκήσεις σχετικές με πολυώνυμα 2ου και 3ου βαθμού καθώς και σε βασικές γνώσεις Αναλυτικής Γεωμετρίας². Επισημάνθηκε επίσης ότι οι ασκήσεις κρίνονται ως επί το πλείστον επιπέδου

²Η αναφορά στην Αναλυτική Γεωμετρία αφορά στο ερώτημα 6. Στο μάθημα αυτό οι φοιτητές μελετούν μεταξύ άλλων επιφάνειες όπως το παραβολοειδές του ερωτήματος, εντούτοις δεν ασχολούνται με προβολές επιφανειών σε επίπεδα. Αυτό συμβαίνει στο μάθημα επιλογής της Προβολικής Γεωμετρίας. Ωστόσο, η έννοια της προβολής ενός σημείου ή μίας καμπύλης σε μία ευθεία είναι

λυκείου.

Έπειτα παρακληθήκαν οι μη ενδιαφερόμενοι να αποχωρήσουν από την αίθουσα πριν τη διανομή, ενώ τονίστηκε ότι η συμμετοχή ήταν εθελοντική. Τέλος διανεμήθηκαν τα ερωτηματολόγια. Σημειώνονται οι πολλαπλές προτροπές προς τους εθελοντές φοιτητές για έκφραση τυχόν αποριών.

Διαδικασία 2ης διανομής

Επαναλήφθηκε η διαδικασία της 1ης διανομής. Επιπλέον μετά τη διανομή οι φοιτητές ενημερώθηκαν για τη δομή του ερωτηματολογίου η οποία περιγράφηκε με το σχεδιασμό του Σχήματος 3.1 στον πίνακα της αίθουσας. Η ενέργεια αυτή αποσκοπούσε στη διευκόλυνσή τους στην ενασχόληση με το ερωτηματολόγιο, αλλά και την ενθάρρυνση για μερική τουλάχιστον απάντησή του.

3.2 Αποτελέσματα

3.2.1 Συνοπτική παρουσίαση

Η συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται με δύο πίνακες. Οι πίνακες αυτοί συγκεντρώνουν ποσοτικά δεδομένα από τα οποία ο αναγνώστης μπορεί να σχηματίσει μία πρώτη συνολική εικόνα των απαντήσεων τόσο του κάθε ερωτήματος, όσο και του κάθε φοιτητή. Κατ' αρχάς από τον πίνακα 3.3 βλέπουμε ότι οι φοιτητές που απάντησαν ικανοποιητικά και στα τρία ερωτήματα-δείκτες 1α', 1β', 1γ' ήταν μόνο δέκα (10/16) δηλαδή 62,5 %. Πιστεύουμε πως το γεγονός αυτό δηλώνει ότι οι υπόλοιποι μάλλον δεν ήταν αρκετά συγκεντρωμένοι, παρά ότι έχουν κάποιο τόσο σοβαρό γνωστικό κενό. Βλέπουμε ακόμα ότι τα μόνα ερωτήματα με τα οποία ασχολήθηκαν όλοι οι φοιτητές είναι τα 1α' και 1γ'. Όχι τυχαία αφού από τη μαθητική τους ηλικία έχουν εξασκηθεί έως το σημείο να απαντούν ανακλαστικά σε αυτά τα ερωτήματα. Δύο επίσης εμφανείς παρατηρήσεις είναι ότι μόλις δύο φοιτητές ασχολήθηκαν με όλα τα ερωτήματα και ότι κανένας δεν έδωσε σωστή απάντηση στο ερώτημα 4, το οποίο είναι και το δυσκολότερο του ερωτηματολογίου. Η μεγάλη αποχή στα ερωτήματα 3γ' 3δ', 3ς' οφείλεται στο "κλείδωμα" των ερωτημάτων αυτών από το 3α'. Δηλαδή είναι αναμενόμενο, αν κάποιος δε μπορεί να απαντήσει στο 3α', να μη μπορεί να απαντήσει και στα τρία άλλα.

γνωστή στους φοιτητές ήδη από το Λύκειο. Ο σκοπός αυτού του ισχυρισμού ήταν να πείσει τους φοιτητές για τον οικείο χαρακτήρα των ερωτημάτων προς αυτούς, καθώς η Αναλυτική Γεωμετρία

Πίνακας 3.3: Συνοπτική παρουσίαση αποτελεσμάτων

	1Α	1Β	1Γ	1Δ	1Ε	2Α	2Β	2Γ	2Δ	2Ε	2ΣΤ	2Ζ	2Η	2Θ	2Ι	2ΙΑ
1α'	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓
1β'	✓	×	✓	✓		✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
1γ'	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×
1δ'	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	×	×	×	✓	✓	✓		✓	×
1ε'	✓	×	×	×		×	✓	✓	×	×	×	×	×		×	×
2	✓	×	×	×		✓	✓	✓	✓	×				×		
3α'	✓					✓	✓	×								
3β'	✓	✓				✓	✓	✓	×	✓		×	×			
3γ'	✓					✓										
3δ'	✓					✓	✓									
3ε'	✓					✓										
3ζ'	✓					✓	×									
4	×	×				×	×	×	×	×	×	×				
5	✓	✓				✓	✓	✓	×	×	✓	✓	✓	×	✓	
6α'	✓	✓				✓	✓	×	✓	×	×	×	×			
6β'	✓	×				✓	×	×	✓	×						

Πίνακας 3.4: Ποσοτικά αποτελέσματα ανά ερώτημα και ανά φοιτητή.

Ερώτημα	Ικανοποιητικές απαντήσεις	Συνολικές απαντήσεις	Γραπτό	Ικανοποιητικές απαντήσεις	Συνολικές απαντήσεις
1α'	14	16	1Α	15	16
1β'	13	15	1Β	6	11
1γ'	15	16	1Γ	4	6
1δ'	10	15	1Δ	3	6
1ε'	3	14	1Ε	2	3
2	5	10	2Α	14	16
3α'	3	4	2Β	11	14
3β'	6	9	2Γ	7	12
3γ'	2	2	2Δ	5	11
3δ'	3	3	2Ε	4	11
3ε'	2	2	2ΣΤ	5	8
3ζ'	2	3	2Ζ	5	9
4	0	9	2Η	5	8
5	9	12	2Θ	2	5
6α'	5	10	2Ι	5	6
6β'	3	7	2ΙΑ	2	5

3.2.2 Απαντήσεις ανά ερώτημα

Οι απαντήσεις σε κάθε ερώτημα παρουσιάζονται κατά το δυνατόν ομαδοποιημένες, περιγραφικά ή αυτολεξεί, πάντα με γνώμονα την πιστή απόδοση των υπο εξέταση χαρακτηριστικών της κάθε απάντησης. Όπου κρίθηκε σκόπιμο, παρατέθηκαν εικόνες από τα γραπτά των φοιτητών. Επιπλέον επιχειρείται ερμηνεία των σφαλμάτων και ανίχνευση των ιδεών των φοιτητών πίσω από κάθε απάντηση.

Ερώτημα 1α'

Έστω πολυώνυμο $q(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$.

Για ποιές τιμές των a_i το πολυώνυμο έχει πραγματικές ρίζες;

Απαντήσεις Ικανοποιητικές: 14 Συνολικές: 16

Όλες σχεδόν οι απαντήσεις είναι σωστές, με εξαίρεση τα γραπτά 1Δ και 2Θ, στα οποία δίνεται η απάντηση ότι πρέπει η διακρίνουσα να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

Ερώτημα 1β'

Αν ξ_i οι πραγματικές ρίζες, να εκφραστούν συναρτήσει των a_i .

Απαντήσεις Ικανοποιητικές: 13 Συνολικές: 15

Η απάντηση που έδωσαν οι περισσότεροι φοιτητές ήταν η αναμενόμενη:

$$\xi_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}.$$

Πέραν αυτής, ικανοποιητική θεωρήθηκε και η απάντηση του φοιτητή 2Ι.

Απάντηση γραπτού 2Ι:

β) Το πολυώνυμο θα έχει το πολύ 2 πραγματικές ρίζες, διότι είναι 2ου βαθμού. Άρα σύμφωνα με τους νόμους του Viète, αν f_1, f_2 οι ρίζες του πολυωνύμου, τότε $f_1 + f_2 = -\frac{a_1}{a_2}$ και $f_1 \cdot f_2 = \frac{a_0}{a_2}$.

είναι υποχρεωτικό μάθημα πρώτου εξαμήνου.

Οι δύο μη ικανοποιητικές απαντήσεις είναι οι ακόλουθες:

Απάντηση γραπτού 1B:

$$(b') \quad a_2 (x - \xi_1)^{k_1} (x - \xi_2)^{k_2} \dots (x - \xi_n)^{k_n}$$

όπου k_i η πολλαπλότητα της ρίζας
και n το πλήθος των ριζών του $q(x)$.

Ο 2B εξέφρασε το πολυώνυμο συναρτήσει των ριζών του. Φαίνεται μάλιστα να μη λαμβάνει υπ' όψιν του ότι το πολυώνυμο του ερωτήματος έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες, καθότι δευτέρου βαθμού.

Απάντηση γραπτού 2Δ:

“Εστω ξ_1, ξ_2 οι πραγματικές ρίζες, τότε $\xi_1 = a_0 + a_1 + a_2, \xi_2 = a_0 a_1 + a_0 a_2 + a_1 a_2$.”

Αυτή η απάντηση καταδεικνύει κάποια σύγχυση του φοιτητή σχετικά με τους τύπους του Viète.

Ερώτημα 1γ'

Αληθεύει ότι $(\forall x)(x^2 - 3x + 4 > 0)$;

Απαντήσεις

Ικανοποιητικές: 15

Συνολικές: 16

Αυτό μαζί με το πρώτο είναι τα μοναδικα ερωτήματα του ερωτηματολογίου με τα οποία ασχολήθηκαν όλοι οι φοιτητές. Πρόκειται για ένα πρόβλημα ρουτίνας επιπέδου Γ' Γυμνασίου. Οι δεκαπέντε σωστές απαντήσεις μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις κατηγορίες με κριτήριο την αιτιολόγηση.

Στην πρώτη και μεγαλύτερη κατηγορία βρίσκονται όλες οι σωστές απαντήσεις πλην των φοιτητών 2Δ, 2Ε, 2Θ. Η αιτιολόγηση στην κατηγορία αυτή είναι αυτή που μαθαίνουν οι μαθητες στη Γ' Γυμνασίου: η διακρίνουσα αρνητική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου θετικός. Η δεύτερη κατηγορία απαρτίζεται από τις απαντήσεις 2Δ και 2Θ. Αυτοί οι δύο φοιτητές υπολογίζουν τη διακρίνουσα και την τιμή της πολυωνυμικής συνάρτησης για $x = 0$ και $x = 1$ αντίστοιχα και απαντούν επικαλούμενοι τη συνέχειά της. Τρίτη κατηγορία ο φοιτητής 2Ε ο οποίος μάλιστα, ως μη όφειλε, υπολογίζει και τις μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου. Εντούτοις η δικαιολόγηση της απάντησής του στο αρχικό ερώτημα είναι ελλιπής. Συγκεκριμένα, υπολογίζει τη διακρίνουσα και στηρίζει την καταφατική του απάντηση στη συνέχεια της πολυωνυμικής συνάρτησης.

Απάντηση γραπτού 2Ε:

γ') Ναι διότι $\Delta < 0$ άρα δε μηδενίζεται στους πραγματικούς το πολυώνυμο που είναι συνεχής συνάρτηση. Έτσι φιλικά τους έχω $p, q \in \mathbb{R}$

$$p, q = \frac{3 \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad \text{Άρα στο } \mathbb{C} \text{ δεν λύνει.}$$

Η μοναδική λανθασμένη απάντηση στο ερώτημα είναι αυτή του 2ΙΑ. Ο φοιτητής επιχειρεί να βρει με επαγωγή στο σύνολο των φυσικών αριθμών τις τιμές του x για τις οποίες αληθεύει η πρόταση.

Απάντηση γραπτού 2ΙΑ:

$\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$ Με την μέθοδο του φαινομένου.
για $x=1 \Rightarrow 1^2 - 3 \cdot 1 + 4 = 5 - 3 = 2 > 0$
Έτσι για $x=k$ ισχύει $k^2 - 3k + 4 > 0$
Θα ισχύει για $k+1$
 $(k+1)^2 - 3(k+1) + 4 = k^2 + 2k + 1 - 3k - 3 + 4 =$
 $= k^2 - k + 2 = k^2 - 3k + 4 + 2k - 2 =$
 $= \underbrace{k^2 - 3k + 4}_{>0} + \underbrace{2(k-1)}_{>0} > 0$ για να είναι > 0 θα πρέπει $2(k-1) > 0 \Leftrightarrow k-1 > 0 \Leftrightarrow k > 1$
Άρα λοιπόν ισχύει η συνθήκη αυτή αληθεύει $\forall x > 1, (1, \infty)$

Βλέπουμε αρχικά ότι το αποτέλεσμα της επαγωγικής μεθόδου $k > 1$ είναι εσφαλμένο καθώς βασίζεται στην αυθαίρετη απαίτηση $2(k-1) > 0$. Ισχυρίζεται δηλαδή ο φοιτητής ότι αν ένα άθροισμα δύο προσθετέων και ο ένας από αυτούς είναι θετικός, τότε είναι και ο άλλος. Έπειτα από το αποτέλεσμα αυτό, συμπεραίνει ότι η συνθήκη αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο του 1. Πρωτίστως είναι απορίας άξιο το γεγονός ότι η μνήμη του φοιτητή δεν ανακάλεσε τις σχολικές του γνώσεις περί πολυωνύμων δευτέρου βαθμού για την επίλυση του προβλήματος, αλλά την επαγωγική μέθοδο. Η επαγωγική μέθοδος προφανώς δεν ενδείκνυται εν προκειμένω, καθώς η πρόταση της οποίας την αλήθεια εξετάζουμε αφορά στους πραγματικούς αριθμούς, όπως αποσαφηνίζεται στην εκφώνηση του 1α'. Τα σφάλματα αυτά δείχνουν ότι ο φοιτητής δεν έχει κατανοήσει τη χρησιμότητα της επαγωγικής μεθόδου.

Ερώτημα 1δ'

Δώστε μία συνθήκη για τα a_i ισοδύναμη με την $(\forall x)(a_2x^2 + a_1x + a_0 > 0)$.

Απαντήσεις

Ικανοποιητικές: 10

Συνολικές: 15

Οι πέντε λανθασμένες απαντήσεις είναι οι ακόλουθες:

Αυτές των γραπτών 2Γ και 2Ε, στις οποίες αναφέρεται ουσιαστικά ότι πρέπει $(\Delta \leq 0) \wedge (a_2 > 0)$. Το σφάλμα εδώ είναι, πιθανόν, εκ παραδρομής.

Του γραπτού 2Δ: “Πρέπει $\Delta < 0$ ”.

Στην απάντηση αυτή παραλείπεται η αναφορά στην τιμή του a_2 . Το γεγονός αυτό ερμηνεύεται ως προσκόλληση στη συνήθη απεικόνιση του τυχαίου τριωνύμου με τα κοίλα προς τα άνω, όπου ισχύει ότι $a_2 > 0$.

Απάντηση γραπτού 1Ε:

$$\textcircled{B'} \{(\forall x) \text{ για το οποίο } \Delta < 0 : a_2 x^2 + a_1 x + a_0 > 0\}$$

Η απάντηση αυτή είναι δυσερμήνευτη. Ένα ενδεχόμενο είναι να πρόκειται περί εκφραστικής αστοχίας. Δηλαδή να εννοεί ο φοιτητής ότι “ $(\Delta < 0) \equiv (\forall x)(a_2 x^2 + a_1 x + a_0 > 0)$ ”. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο προσκόλλησης με την απάντηση 2Δ. Ένα άλλο ενδεχόμενο είναι ο φοιτητής να εννοούσε αυτό που έγραψε. Σε αυτή την περίπτωση φαίνεται να αντιλαμβάνεται τη διακρίνουσα ως συνάρτηση του x . Κρίνοντας πάντως από τις υπόλοιπες απαντήσεις του φοιτητή, μάλλον θα πρέπει να απορρίψουμε το δεύτερο ενδεχόμενο.

Απάντηση γραπτού 2ΙΑ:

(B) Αρχικά να βρω μια συνθήκη που ισχύει πάντα
 Δηλαδή αν διαφορικήσω ισάζ, α1 και α0 α1 α0 2 α1 α0
 ώστε να βρω τακτική και να είναι δέκα
 αν
 $a_1 = 2\sqrt{a_2 \cdot a_0}$ $\forall x$
 $(a_1 x^2 + 2\sqrt{a_2 \cdot a_0} x + a_0) = (\sqrt{a_2} x + \sqrt{a_0})^2 > 0$
 άρα για
 $a_1 = 2\sqrt{a_2 \cdot a_0}$ ισχύει!

Αυτή είναι μία ευφάνταστη απάντηση. Τα σφάλματα που παρουσιάζονται είναι δύο ειδών. Κατ' αρχάς λογικής καθώς από την πρώτη πρόταση φαίνεται ότι ο φοιτητής σκοπεύει στην εύρεση μίας ικανής συνθήκης. Προφανώς μία ικανή συνθήκη δεν είναι και αναγκαία. Έπειτα παρατηρούνται αλγεβρικά σφάλματα. Αφενός η ύπαρξη των αριθμών $\sqrt{a_0}$, $\sqrt{a_2}$ προϋποθέτει ότι οι a_0 , a_2 είναι μη αρνητικοί. Αφετέρου δεν ισχύει για κάθε x ότι $(\sqrt{a_2} x + \sqrt{a_0})^2 > 0$, καθότι το τέλει αυτό τετράγωνο μηδενίζεται

όταν $x = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $a_2 \neq 0$ άρα η τιμή αυτή του x είναι δυνατή. Όλα αυτά τα λάθη ερμηνεύονται ως προσπάθεια εκβίασης ενός επιθυμητού αποτελέσματος.

Ερώτημα 1ε'

Δώστε μία συνθήκη για τα a_i ισοδύναμη με την $(\exists x)(a_2x^2 + a_1x + a_0 > 0)$.

Απαντήσεις

Ικανοποιητικές: 3

Συνολικές: 14

Ο φοιτητής 1Α διακρίνει δυο περιπτώσεις ($a_2 > 0$ και $a_2 < 0$) και αποδεικνύει ότι ισοδύναμη συνθήκη είναι η $(a_2 > 0) \vee ((a_2 < 0) \wedge \Delta > 0)$. Η συνθήκη αυτή μπορεί να απλοποιηθεί στην $(a_2 > 0) \vee (\Delta > 0)$, η οποία είναι η απάντηση του φοιτητή 2Β. Απάντηση γραπτού 2Γ:

$$\{a_i : a_i \in \mathbb{R}\} \setminus \{a_i : a_1^2 - 4a_2a_0 \leq 0, a_2 \leq 0, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

Ενδιαφέρουσα είναι και η τρίτη ικανοποιητική απάντηση στο ερώτημα. Πιθανολογούμε ότι η απάντηση αυτή βασίζεται στη διαίσθηση του φοιτητή, καθώς φαίνεται να αφαιρεί από όλες τις δυνατές τιμές των a_i αυτές που δίνουν ένα ανεπιθύμητο γράφημα. Τα ανεπιθύμητα γραφήματα είναι δύο: με τα κοίλα προς τα κάτω και ολικό μέγιστο είτε αρνητικό, ή μηδενικό. Οι δύο αυτές περιπτώσεις περιγράφονται από τη συνθήκη $(a_2 < 0) \wedge (\Delta \leq 0)$. Εξαιρεί λοιπόν ο φοιτητής από τις δυνατές τιμές των a_i αυτές που ικανοποιούν την ανωτέρω συνθήκη. Σημειώνεται ακόμα πως από την υπόθεση της άσκησης ισχύει ότι $a_2 \neq 0$, γι' αυτό εν προκειμένω έχουμε ότι $a_2 \leq 0 \Rightarrow a_2 < 0$. Ειδικά η απάντηση θα ήταν λανθασμένη.

Ακολουθούν οι ένδεκα λανθασμένες απαντήσεις:

Απάντηση γραπτού 1Β: $\Delta > 0$

Αυτή είναι μία ικανή συνθήκη. Ομοίως και αυτές που δίνουν οι 1Δ και 1Γ, κάτι το οποίο φαίνεται να αναγνωρίζει μόνο ο τελευταίος.

Απάντηση γραπτού 1Γ:

Για να ισχύει η $(\exists x)(q(x) > 0)$ μία συνθήκη είναι η " $\Delta > 0$ και $a_2 > 0$ ".

Απάντηση γραπτού 1Δ:

Για να υπάρχει x έτσι ώστε $q(x) > 0$ πρέπει $\Delta > 0$ και $a_2 > 0$.

Απάντηση γραπτού 2Α:

$(a_2 > 0)$ ή $(a_2 < 0$ και $\Delta \geq 0)$ ή $(a_2 = 0$ και $a_1 \neq 0)$ ή $(a_2 = a_1 = 0$ και $a_0 > 0)$.

Η ιδέα εδώ φαίνεται να είναι ότι μία ισοδύναμη συνθήκη προκύπτει από τη διάζευξη όλων των ικανών συνθηκών. Η δεύτερη συνθήκη όμως στην παραπάνω διάζευξη δεν είναι ικανή. Για την ακρίβεια, αν ισχύει ότι $a_2 < 0$ και $\Delta = 0$, τότε δεν υπάρχει x για

το οποίο $q(x) > 0$. Ωστόσο, αν στη θέση αυτής της συνθήκης ήταν η ($a_2 < 0$ και $\Delta > 0$), τότε η απάντηση αυτή θα ήταν σωστή. Το λάθος αυτό μάλλον θα πρέπει να θεωρηθεί απροσεξία. Στο ενδεχόμενο αυτό συντείνει και το γεγονός ότι ο φοιτητής αναφέρεται και στην περίπτωση που το a_2 μηδενίζεται.

Απάντηση γραπτού 2Δ: Πρέπει $\Delta \geq 0$.

Απάντηση γραπτού 2Ε: Θα πρέπει $\Delta \leq 0$ ή ($\Delta > 0$ και $a_2 > 0$)

Απάντηση γραπτού 2ΣΤ:

Πρέπει α) $\Delta = 0$, άρα έχω διπλή ρίζα που διατηρεί το πρόσημο, β) $a_2 > 0$.

Απάντηση γραπτών 2Ζ, 2Η: $\Delta = 0$, $a_2 > 0$.

Απάντηση γραπτού 2Ι: $a_i \in \mathbb{R}$.

Απάντηση γραπτού 2ΙΑ:

Θετουμε μια συνθήκη για και $\forall x$ ($a_2 x^2 + a_1 x + a_0 > 0$)
 Θα δειχουμε για $x=1$ $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_2 + a_1 + a_0 \geq 0$
 και για $x=k$ $a_2 k^2 + a_1 k + a_0 > 0$
 άρα για να ισχύει θα πρέπει να ισχύει
 $a_2 (k+1)^2 + a_1 (k+1) + a_0 \geq 0$
 $\underbrace{a_2 k^2 + 2a_1 k + a_1 + a_1 k + a_1 + a_0}_{>0} =$
 άρα $2a_1 k + a_1 > 0$
 $2a_1 k > -a_1$ θα πρέπει επομένως
 $\exists$ x μεγαλύτερο $k > -a_1 / (2a_2)$ εφόσον να ισχύει
 το $(-\infty, -a_1 / (2a_2))$ $\neq \emptyset$ ή αντιστοίχα
 να ισχύει η ισότητα

Βλέπουμε ότι ο 2ΙΑ εξακολουθεί να χρησιμοποιεί επαγωγική μέθοδο. Επικαλείται και εδώ τον ίδιο λανθασμένο ισχυρισμό περί θετικών αθροισμάτων που είδαμε στην απάντησή του στο ερώτημα 1γ'.

Ερώτημα 2

Έστω $q(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x - \frac{5}{8}$

Έχει πραγματική ρίζα το πολυώνυμο αυτό; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Απαντήσεις

Ικανοποιητικές: 5

Συνολικές: 10

Και οι πέντε φοιτητές που έδωσαν ικανοποιητική απάντηση αντιμετώπισαν το ερώτημα ως πρόβλημα της πραγματικής ανάλυσης. Ο 1Α απαντά επικαλούμενος το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών ενώ οι υπόλοιποι το θεώρημα Bolzano. Μάλιστα οι φοιτητές 2Β, 2Γ και 2Δ εφαρμόζουν και οι τρεις το θεώρημα στο διάστημα $[0, 1]$. Οι 1Α και 2Α δεν αναφέρονται σε συγκεκριμένο διάστημα τιμών του x , αλλά προσπαθούν να αποδείξουν την ύπαρξη κατάλληλου διαστήματος για την εφαρμογή του θεωρήματος που ο καθένας επικαλείται.

Απάντηση γραπτού 1Α:

“Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{q}(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{q}(x) = -\infty.$$

Η $\bar{q}(x), x \in \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση πολυωνυμική, άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών ότι έχει πραγματική ρίζα.”

Απάντηση γραπτού 2Α:

2. Ναι: $\textcircled{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty, \textcircled{b} \lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = -\infty$, ~~και~~

Από του ορισμού των ορίων $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < 0 < x_2$ τέτοια ώστε

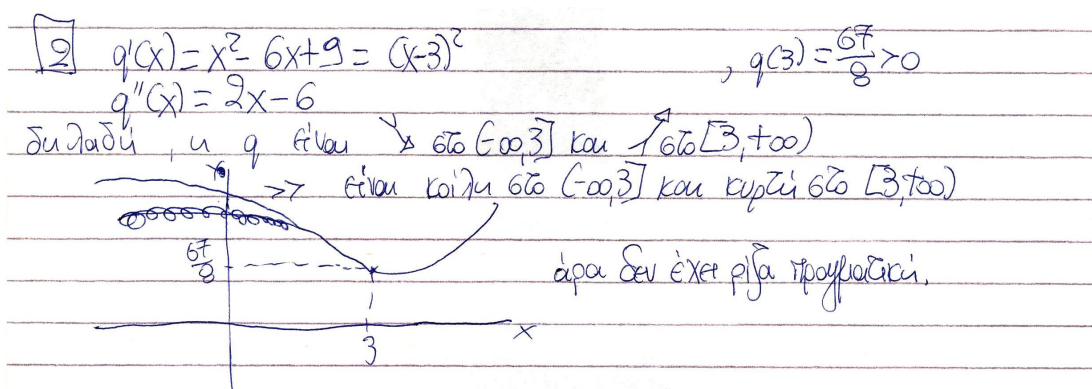
~~$q(x_1) < 0 < q(x_2)$~~ διαιστών η q είναι βωακνή στο $[x_1, x_2]$

Από το Bolzano $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $q(\xi) = 0$.

Και οι δύο στηρίζουν την ύπαρξη κατάλληλου διαστήματος αφενός στα όρια της πολυωνυμικής συνάρτησης στο ∞ και το $-\infty$, αφετέρου στη συνέχειά της. Αυτός ο συλλογισμός σκιαγραφεί μία διαισθητική εικόνα του γραφήματος μίας συνεχούς συνάρτησης επί του $\mathbb{R}$. Η εικόνα αυτή καθιστά προφανή γι' αυτούς την ύπαρξη του ζητούμενου διαστήματος και κατ' επέκταση μίας πραγματικής ρίζας.

Από τους πέντε που δεν έδωσαν ικανοποιητική απάντηση, ο 2Θ προσέγγισε κι αυτός το ερώτημα ως πρόβλημα πραγματικής ανάλυσης, ωστόσο δεν κατάφερε να απαντήσει σωστά.

Απάντηση γραπτού 2Θ:



Η ιδέα της μελέτης της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης είναι και αυτή εύστοχη, όμως ο φοιτητής δεν υπολόγισε σωστά τη μονοτονία, οδηγούμενος έτσι σε εσφαλμένο αποτέλεσμα. Οι υπόλοιποι τέσσερις ανέτρεξαν στις αλγεβρικές τους γνώσεις για να λύσουν το πρόβλημα, εις μάτιν όμως. Ακολουθούν οι απαντήσεις αυτές.

Απάντηση γραπτού 1B:

“αυτό θα φανεί από το αν το πολυώνυμο $q(x)$ παραγοντοποιείται και αυτό έχω την εντύπωση ότι μπορούμε να το βρούμε εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Ευκλείδη”

Ο φοιτητής 1B μεταθέτει το πρόβλημα ύπαρξης ρίζας σε πρόβλημα παραγοντοποίησης. Έχει κάθε δικαίωμα προς τούτο, καθώς αφενός μπορούμε να θεωρήσουμε το $q(x)$ σαν στοιχείο του $\mathbb{R}[x]$ και το $\mathbb{R}$ είναι σώμα, αφετέρου το $q(x)$ είναι βαθμού μικρότερου ή ίσου του τρεις. Ωστόσο η ιδέα δεν είναι ιδιαίτερα γόνιμη αφού ουδόλως διευκολύνει το λύτη, οδηγώντας τον έτσι στην αμηχανία που δείχνει η απάντησή του.

Απάντηση γραπτού 1Γ:

2) $q(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x - \frac{5}{8}$
 $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x - \frac{5}{8} = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 72x^2 + 216x - 15 = 0$

8	-72	216	-15	3
8	24	-144		
8	-48			

 Θα κάνω Horner με τα $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$ επειδή με αυτά διαιρείται το -15 που είναι ο σταθ. όρος.
 Δεν βγαίνει με κανένα, δεν έχει πραγμα ρίζα

Απάντηση γραπτού 1Δ:

2)	$q(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - \frac{5}{8}$
	8 - 72 216 -15 οι συντελεστές του πολυωνύμου
	Δεν μπορεί να εφαρμοστεί Horner.
	Δεν έχει ραβδωτικές ρίζες.

Οι 1Γ και 1Δ προσανατολίζονται στη διαδικασία εύρεσης ακεραίων ριζών που βασίζεται στο ομώνυμο θεώρημα. Ο 1Γ αρκείται απλώς να βρει όλες τις πιθανές ακέραιες ρίζες και να μας περιγράψει τη συνέχεια της διαδικασίας, ενώ ο 1Δ αποφαίνεται ότι δε μπορούμε να εφαρμόσουμε σχήμα Horner! Μάλλον εννοεί ότι καμία πιθανή ακέραιη ρίζα ρ δεν οδηγεί σε τέλεια διαίρεση $q(x) : (x - \rho)$. Και οι δύο πάντως καταλήγουν ότι η αποτυχία εύρεσης ριζών με αυτή τη διαδικασία συνεπάγεται ανυπαρξία πραγματικών ριζών για το πολυώνυμο. Ο ισχυρισμός αυτός καταδεικνύει ότι οι φοιτητές δε γνωρίζουν ούτε την ακριβή χρησιμότητα, ούτε το θεωρητικό υπόβαθρο του αλγορίθμου που επικαλούνται. Πρόκειται δηλαδή για ένα δείγμα μηχανιστικής μάθησης.

Απάντηση γραπτού 2Ε:

2)	Θα έχει το πολύ 3 ρίζες και από αυτές Viète θα πείσει
	α₁α₂α₃ = 3
	$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = -9$
	$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{5}{8}$
	α₁α₂α₃ = 3
	α₁α₂α₃ = 3
	αν $\exists x \in \mathbb{R} \mid \alpha x$
	Εξέρχεται 25 κ275+2

Ο τελευταίος φοιτητής αρκείται στην καταγραφή σχετικών τύπων του Viète ενώ η παρατήρηση στο τέλος της απάντησης δείχνει ότι δεν έχει κατανοήσει το ζητούμενο του ερωτήματος.

Ερώτημα 3α'

Έστω πολυώνυμο $q(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$, $a_3 \neq 0$.

Για ποιές τιμές των a_i το πολυώνυμο έχει πραγματικές ρίζες;

Απαντήσεις Ικανοποιητικές: 3 Συνολικές: 4

Με το ερώτημα αυτό ασχολήθηκαν μόνο οι τέσσερις από τους πέντε που απάντησαν σωστά το προηγούμενο. Το κύριο ζητούμενο είναι η γενίκευση του αποτε-

λέσματος του ερωτ. 2. Η απάντηση του 1Α δείχνει ξεκάθαρα τη γενίκευση αυτή, ενώ και η σαφής και ατεκμηρίωτη απάντηση του 2Α μπορεί εύλογα να θεωρηθεί ως δηλωτική της ζητούμενης γενίκευσης.

Απάντηση γραπτού 1Α:

“Όπως είδαμε στη 2, έχει πάντα πραγματικές ρίζες”.

Απάντηση γραπτού 2Α:

“Για $a_3 \neq 0$ το $q(x)$ έχει πάντοτε πραγματικές ρίζες.

Για $a_3 = 0$ το $q(x)$ έχει πραγματικές ρίζες όταν $a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0$ ”.

Ακολουθούν οι απαντήσεις των φοιτητών που απάντησαν το ερώτημα 2 με χρήση του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$.

Απάντηση γραπτού 2Β:

ΘΕΜΑ 3

$q(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_3 \neq 0$

(α') Επειδή είναι 3^{ου} βαθμού πολ/μο, και επειδή γνωρίζουμε ότι οι μιγαδικοί ρίζες εμφανίζονται κατά ζεύγη, συμπεραίνουμε ότι το $q(x)$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα $\forall a_i \in \mathbb{R}$

Πράγματι, η ύπαρξη μίας πραγματικής ρίζας του πολυωνύμου αυτού έπεται του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας και του θεωρήματος συζυγών μιγαδικών ριζών. Η απάντηση αυτή δείχνει μία διαφορετική γενίκευση από τη ζητούμενη, την οποία θα ονομάσουμε “γενίκευση του πλαισίου αναφοράς”. Βλέπουμε ότι για να απαντήσει ο φοιτητής, γενικεύει το πλαίσιο αναφοράς του προβλήματος από τους πραγματικούς αριθμούς στους μιγαδικούς. Αν η λύση αυτή δεν ήταν ήδη διδαγμένη στο φοιτητή από κάποιο μάθημα τότε η ιδέα του είναι ενδεικτική ασυνήθιστης μαθηματικής ωριμότητας!

Απάντηση γραπτού 2Γ: “ΔΞ / ΔΑ”.

Ο φοιτητής αυτός αντιμετωπίζει το ερώτημα μάλλον ως ερώτηση γνώσης παρά ως πρόβλημα εύρεσης. Υποθέτουμε ότι το ίδιο συνέβη και με το φοιτητή 2Δ, ο οποίος επίσης απάντησε το προηγούμενο ερώτημα με χρήση του θεωρήματος Bolzano στο $[0, 1]$ και είναι ο μοναδικός που ενώ απάντησε σωστά στο 2 δεν ασχολήθηκε με το 3α'. Είναι αξιοσημείωτο ότι κανένας από τους τρεις που απάντησαν με τον τρόπο αυτό το 2, δεν προέβη στην αναμενόμενη γενίκευση στο 3α'. Το γεγονός αυτό δείχνει μηχανιστική και μάλλον τυχαία χρήση του θεωρήματος στο ερώτ. 2. Γενικά θα λέγαμε ότι η μεγάλη “αποχή” των φοιτητών από το ερώτημα δείχνει ασαφή εικόνα στη σκέψη τους του γραφήματος μίας πραγματικής πολυωνυμικής συνάρτησης 3ου βαθμού.

Ερώτημα 3β'

Γνωρίζετε αν υπάρχει αναλυτικός τύπος γι' αυτές;

Απαντήσεις Ικανοποιητικές: 6 Συνολικές: 9

Απάντηση γραπτού 1Α: “Υπάρχουν οι λεγόμενοι τύποι του Cardano, αλλά είναι πολύπλοκοι.”

Απάντηση γραπτού 1Β: “Ο αναλυτικός τύπος των ριζών του πολυωνύμου $q(x)$ δίνεται από τον τύπο του Viète.”

Απάντηση γραπτού 2Α: “Υπάρχει”

Απάντηση γραπτού 2Β: “Υπάρχει αναλυτικός τύπος, τον έδωσε ένας Ιταλός νομίζω Tartaglia.”

Απάντηση γραπτού 2Γ: “Υπάρχει αλλά δεν τον γνωρίζω διότι δεν διδάσκεται στα σχολεία και στο πανεπιστήμιο θεωρείται γνωστός και δεν διδάσκεται.”

Απάντηση γραπτού 2Δ: “Ναι, το σχήμα Horner.”

Απάντηση γραπτού 2Ε: “Υπάρχει του Tartaglia.”

Απάντηση γραπτών 2Ζ, 2Η: “Όχι”

Όπως φαίνεται από τις απαντήσεις, μόνο οι έξι φοιτητές γνωρίζουν την ύπαρξη αναλυτικού τύπου για τις πραγματικές ρίζες πολυωνύμου 3ου βαθμού. Δεδομένης της ευκολίας του ερωτήματος μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι υπόλοιποι επτά φοιτητές που δεν απάντησαν, δεν ήταν βέβαιοι για την απάντηση. Η εξήγηση αυτού του δυσάρεστου ευρήματος νομίζουμε ότι βρίσκεται στην απάντηση του φοιτητή 2Γ. Ενδιαφέρονσα είναι και η απάντηση 2Δ καθώς δείχνει ότι ο φοιτητής δεν έχει κατανοήσει το ερώτημα, δηλαδή δεν του είναι σαφής η έννοια του αναλυτικού τύπου.

Ερώτημα 3γ'

Για ποιες τιμές των a_i ισχύει ότι $(\exists x)(q(x) > 0)$;

Απαντήσεις Ικανοποιητικές: 2 Συνολικές: 2

Σε αυτό και στα υπόλοιπα υποερωτήματα του ερωτήματος 3 αναμένεται να έχουν απαντήσει όσοι απάντησαν ικανοποιητικά στο 3α'. Αναμένεται δηλαδή να έχουμε τρεις απαντήσεις στο καθένα. Παραδόξως όμως ένας από αυτούς, ο φοιτητής 2Β απαντά μόνο στα 3δ' και 3ζ'.

Απάντηση γραπτού 1Α:

“Αν $a_3 > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = \infty$, ενώ αν $a_3 < 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = \infty$.”

“Άρα πάντα θα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $q(x) > 0$.”

Απάντηση γραπτού 2Α: “Για $a_3 \neq 0$ ή για $a_3 = 0$ και $1(\varepsilon)$.”

Ερώτημα 3δ'

Για ποιες τιμές των a_i ισχύει ότι $(\forall x)(q(x) > 0)$;

Απαντήσεις Ικανοποιητικές: 3 Συνολικές: 3

Απάντηση γραπτού 1A: “Από το (α'), δεν υπάρχουν τέτοια a_i , διότι υποθέτουμε ότι το $a_3 \neq 0$.”

Απάντηση γραπτού 2A: “Για $a_3 = 0$ και 1(δ').”

Απάντηση γραπτού 2B: “Δεν υπάρχουν τιμές των a_i για τις οποίες να ισχύει $(\forall x)(q(x) > 0)$ διότι δείξαμε ότι έχει πραγματική ρίζα.”

Η απάντηση του 2A δείχνει να μη λαμβάνει υπ' όψιν τον περιορισμό $a_3 \neq 0$ που τίθεται στην εκφώνηση του ερωτήματος 3. Αυτό συμβαίνει είτε από απροσεξία, είτε επειδή εκλαμβάνει το ερώτημα “Για ποιες τιμές...;” ως δηλωτικό ύπαρξης τιμών, οπότε παραβλέπει τον περιορισμό για να δώσει “πάση θυσία” τιμές στα a_i .

Ερώτημα 3ε'

Δώστε μία συνθήκη για τα a_i ισοδύναμη με την $(\exists x)(q(x) > 0)$.

Απαντήσεις Ικανοποιητικές: 2 Συνολικές: 2

Απάντηση γραπτού 1A: “Έπεται από το γ' ότι οι ζητούμενες τιμές είναι οι $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, 0$ με $a_3 \neq 0$.”

Απάντηση γραπτού 2A: “ $\rightarrow (\gamma)$ ”

Παραπέμπει δηλαδή στην απάντηση του ερωτήματος 3γ'.

Ερώτημα 3ς'

Δώστε μία συνθήκη για τα a_i ισοδύναμη με την $(\forall x)(q(x) > 0)$.

Απαντήσεις Ικανοποιητικές: 2 Συνολικές: 3

Απάντηση γραπτού 1A: “Έπεται από το δ'.”

Απάντηση γραπτού 2A: “ $\rightarrow (\delta)$ ”

Παραπέμπει δηλαδή στην απάντηση του ερωτήματος 3δ'.

Απάντηση γραπτού 2B: “Δεν υπάρχει ισοδύναμη συνθήκη”

Η ταυτολογία και η αντιλογία που ζητούνταν στα ερωτήματα 3ε' και 3ς' αντίστοιχα, όπως αναφέρεται στον πίνακα 1.1, δεν εμφανίζονται στις απαντήσεις. Ο λόγος γι' αυτό είναι πρωτίστως η άστοχη εκφώνηση των ερωτημάτων και δευτερευόντως το γεγονός

ότι, όπως είναι φυσικό, οι φοιτητές δεν έχουν σαν πρώτη επιλογή μαθηματικής τους έκφρασης την αμιγώς τυπική μαθηματική γλώσσα!

Ως εκ τούτου οι απαντήσεις στα 2 ερωτήματα πρέπει να εκληφθούν ως ικανοποιητικές, καθώς είναι συνθήκες γραμμένες σε φυσική γλώσσα, με εξαίρεση την απάντηση του 2B στο 3ς', διότι η ανυπαρξία κατάλληλων τιμών για τα a_i δε σημαίνει και ανυπαρξία συνθήκης.

Ερώτημα 4

Δώστε μία συνθήκη για τα λ και μ ισοδύναμη με την ακόλουθη

$$(\exists x)[(\lambda x^2 + \mu x - 2 = 0) \wedge (-x^2 + 2\mu x - 3\lambda > 0)]$$

Απαντήσεις

Ικανοποιητικές: 0

Συνολικές: 9

Στο ερώτημα αυτό κανένας φοιτητής δεν κατάφερε ούτε να δώσει μία ικανή και αναγκαία συνθήκη, ούτε να περιγράψει έναν ορθό τρόπο εύρεσης μίας τέτοιας. Οι απαντήσεις μπορούν να διακριθούν σε τρεις κατηγορίες με κριτήριο τον τρόπο προσέγγισης του προβλήματος.

Στην πρώτη κατηγορία συγκαταλέγονται οι περισσότερες απαντήσεις, έξι τον αριθμό. Όλοι οι φοιτητές της κατηγορίας επιμερίζουν τη λογική σύζευξη ως προς την υπαρξιακή ποσόδειξη, μετατρέποντας έτσι τη συνθήκη του ερωτήματος στην

$$[(\exists x)(\lambda x^2 + \mu x - 2 = 0)] \wedge [(\exists x)(-x^2 + 2\mu x - 3\lambda > 0)].$$

Προφανώς όμως η συνθήκη αυτή δεν είναι ισοδύναμη με εκείνη της εκφώνησης. Δηλαδή οι φοιτητές μετατρέπουν το αρχικό πρόβλημα σε ένα ουσιωδώς διαφορετικό και σαφώς ευκολότερο. Ωστόσο, σε αυτό το ευκολότερο πρόβλημα μόνο οι τέσσερις απάντησαν σωστά.

Οι σωστές απαντήσεις στο εσφαλμένα τροποποιημένο ερώτημα:

Απάντηση γραπτού 2Α:

$$“ \mu^2 + 8\lambda \geq 0 \quad \text{και} \quad 4\mu^2 - 12\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu^2 + 8\lambda \geq 0 \\ \mu^2 - 3\lambda \geq 0 \end{cases} ”$$

Απάντηση γραπτού 2ΣΤ:

$$(\exists x)[(\lambda x^2 + \mu x - 2 = 0) \wedge (-x^2 + 2\mu x - 3\lambda > 0)]$$

$\left(\begin{array}{l} \text{Πρέπει } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \mu^2 + 8\lambda \geq 0 \\ \text{Πρέπει } \Delta > 0 \Leftrightarrow 4\mu^2 - 12\lambda > 0 \end{array} \right)$

$$\mu^2 - 3\lambda > 0$$

Απάντηση γραπτού 2Z:

$$\mu^2 + 8\lambda \geq 0 \quad \text{και} \quad 4\mu^2 - 12\lambda \geq 0$$

Απάντηση γραπτού 2Δ:

4) πρέπει $\mu^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (-2) \geq 0$ και $(2\mu)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3\lambda) < 0$

$$\mu^2 + 8\lambda \geq 0 \quad \text{και} \quad 4\mu^2 - 12\lambda < 0$$

$$\mu^2 + 8\lambda \geq 0 \quad \text{και} \quad \mu^2 - 3\lambda < 0$$

$$\mu^2 \geq -8\lambda \quad \text{και} \quad \mu^2 < 3\lambda$$

δηλ. πρέπει $-8\lambda \leq \mu^2 < 3\lambda$

Οι λανθασμένες απαντήσεις στο εσφαλμένα τροποποιημένο ερώτημα:

Απάντηση γραπτού 2Γ:

Παράδειγμα 4

Πρέπει $\mu^2 \geq 3\lambda$ διότι πρέπει

$$(\lambda x^2 + \mu x - 2 = 0) \wedge (-x^2 + 2\mu x - 3\lambda > 0)$$

$$(\mu^2 + 8\lambda \geq 0) \wedge (4\mu^2 - 12\lambda > 0)$$

$$(\mu^2 \geq -8\lambda) \wedge (\mu^2 > 3\lambda)$$

Άρα $\mu^2 > 3\lambda$

Βλέπουμε ότι ο 2Γ θεωρεί την $((\mu^2 \geq -8\lambda) \wedge (\mu^2 > 3\lambda))$ ισοδύναμη με την $(\mu^2 > 3\lambda)$, δηλαδή εκλαμβάνει την $(\mu^2 \geq -8\lambda)$ ως αντιλογία. Ο ισχυρισμός αυτός είναι λαμβανόμενος εφ' όσον δεν δίνεται από την υπόθεση κάποιος περιορισμός για τις τιμές του λ . Το λάθος αυτό μάλλον πρέπει να το αποδόσουμε στην παρουσία του προσήμου “-”, το οποίο δημιουργεί την εντύπωση του αρνητικού αριθμού, και στην ελλειπή συγκεντρωση βέβαια, διότι θα ήταν υπερβολικό να ισχυριστούμε ότι ένας φοιτητής μαθηματικών μπορεί να έχει ένα τέτοιο γνωστικό κενό.

Απάντηση γραπτού 1B:

$$\begin{array}{ll}
 4) \quad \lambda x^2 + \mu x - 2 = 0 & -x^2 + 2\mu x - 3\lambda > 0 \\
 \Delta = \mu^2 + 8\lambda & \Delta = 4\mu^2 - 12\lambda \\
 \text{Εφόσον } \lambda \neq 0, \mu \neq 0 & \text{Για να είναι} \\
 \text{μεταβολή } \Delta > 0 & -x^2 + 2\mu x - 3\lambda > 0 \\
 \text{δίδει } \Delta > 0 \text{ τότε } \Delta > 0 & \text{πρέπει } \Delta > 0 \Rightarrow \\
 \Delta > 0 & 4\mu^2 > 12\lambda \Rightarrow \\
 & \mu^2 > 3\lambda \Rightarrow \\
 & \lambda < \frac{\mu^2}{3}
 \end{array}$$

Ο φοιτητής 1B αφού υπολογίσει τη διακρίνουσα του πρώτου πολυωνύμου, δεν ασχολείται περαιτέρω μαζί της. Αυτή η συμπεριφορά ερμηνεύεται ως ενδεικτική του ίδιου λανθασμένου συλλογισμού με αυτόν του 2Γ.

Η δεύτερη κατηγορία απαρτίζεται από τα γραπτά 2B και 2E. Οι δύο φοιτητές επιχειρούν να συμπυκνώσουν τις δύο σχέσεις της συνθήκης σε μία, αντικαθιστώντας στην ανίσωση το x και το x^2 αντίστοιχα, σύμφωνα με την εξίσωση. Συγκεκριμένα: Απάντηση γραπτού 2B:

$$(\exists x)[(\lambda x^2 + \mu x - 2 = 0) \wedge (-x^2 + 2\mu x - 3\lambda > 0)] \Leftrightarrow (\exists x)[-x^2 + 2(2 - \lambda x^2) - 3\lambda > 0] \Leftrightarrow$$

Δηλαδή αντικαθιστά στην ανίσωση το x με $\frac{2 - \lambda x^2}{\mu}$. Κατ' αρχάς δεν είναι βέβαιο ότι η αντικατάσταση αυτή είναι εφικτή καθώς δεν αποκλείεται η παράμετρος μ να παίρνει την τιμή μηδέν. Έπειτα η ισοδυναμία που έχει γράψει ο φοιτητής μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου τύπου δεν ισχύει, παρά μόνο η λογική συνεπαγωγή " $\rightarrow$ ". Επομένως, η αντικατάσταση που προτείνει ο φοιτητής οδηγεί σε συνθήκη αναγκαία αλλά όχι ικανή, η οποία εκτός των μ και λ θα περιέχει και x . Ομοίως και η αντικατάσταση την οποία μάλιστα έχει κάνει εσφαλμένα ο 2E (εσφαλμένη δύναμη) οδηγεί σε μία συνθήκη με τα ίδια "ελαττώματα".

Απάντηση γραπτού 2E:

$$\begin{array}{l}
 \text{Είναι } \text{ένα σύστημα} \\
 4) \quad (\exists x) \quad (\lambda x^2 + \mu x - 2 = 0) \wedge (-x^2 + 2\mu x - 3\lambda > 0) \\
 \text{συν την} \\
 x^2 = -\frac{\mu x + 2}{\lambda} \quad \text{από } \text{αντικαθιστώντας συν } 2 \\
 (\exists x) \quad \left(-\frac{\mu x + 2}{\lambda}\right)^2 + 2\mu x - 3\lambda > 0.
 \end{array}$$

Η τρίτη κατηγορία αποτελείται εξ ολοκλήρου από την απάντηση 1Α, η οποία συνιστά την διεξοδικότερη μακράν των υπολοίπων εξέταση του προβλήματος. Δυστυχώς όμως και σε αυτή παρουσιάζονται σφάλματα. Επειδή η απάντηση είναι μακροσκελής, θα παρουσιαστεί κατά το δυνατόν συνοπτικότερα.

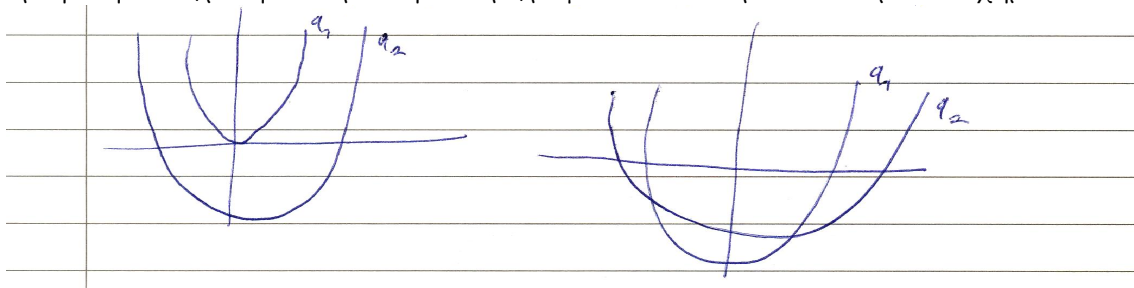
Απάντηση γραπτού 1Α:

Αρχικά ο φοιτητής ονομάζει $q_1(x) = \lambda x^2 + \mu x - 2$ και $q_2(x) = x^2 - 2\mu x + 3\lambda$ και έτσι η δεδομένη συνθήκη μετατρέπεται στην

$$(\exists x)[(q_1(x) = 0) \wedge (q_2(x) < 0)].$$

Πρώτα εξετάζει την περίπτωση κατά την οποία $\lambda \neq 0$. Βρίσκει αναγκαία συνθήκη για τις διακρίνουσες των δύο πολυωνύμων ώστε τα πολυώνυμα να έχουν πραγματικές ρίζες. Έπειτα διακρίνει τις υποπερίπτώσεις $\lambda > 0$ και $\lambda < 0$.

Ξεκινά με την εξέταση της πρώτης υποπερίπτωσης, γράφοντας κατά λέξη: “Έχοντας εξασφαλίσει ότι οι παραβολές έχουν κοινά σημεία με τους άξονες, θα πρέπει είτε οι παραβολές να μην έχουν κοινά σημεία, είτε οι παραβολές να τέμνονται σε σημεία με αρνητική τεταγμένη”. Παράλληλα περιγράφει τις δύο περιπτώσεις με το σχήμα:



Μετά θεωρεί το πολυώνυμο $q_1(y) - q_2(y)$ και περιγράφει αλγεβρικά την πρώτη περίπτωση με τη σχέση: $\Delta < 0$. Στη δεύτερη περίπτωση αναζητά λύσεις της

$$q_1(y) = q_2(y) < 0$$

και καταλήγει στα εξής:

Αν $\lambda = 1, \mu = 0$, άτοπο.

Αν $\lambda = 1, \mu \neq 0$ τότε το μοναδικό κοινό σημείο είναι το $(\frac{5}{3\mu}, \frac{25}{9\mu^2} - \frac{1}{3})$, άρα $\mu^2 > \frac{25}{3}$.

Αν $\lambda \neq 1$, τότε $-\frac{3\mu}{\lambda-1} < 0, \frac{-2-3\lambda}{\lambda-1} > 0$.

Ο τρόπος με τον οποίο ο φοιτητής έφτασε στο τελευταίο συμπέρασμα είναι αξιοσημείωτα εσφαλμένος:

Έστω ότι $\lambda \neq 0$. Αν x_1, x_2 τα κοινά σημεία, τότε

$$x_1 + x_2 = -\frac{3\lambda}{\lambda - 1}$$

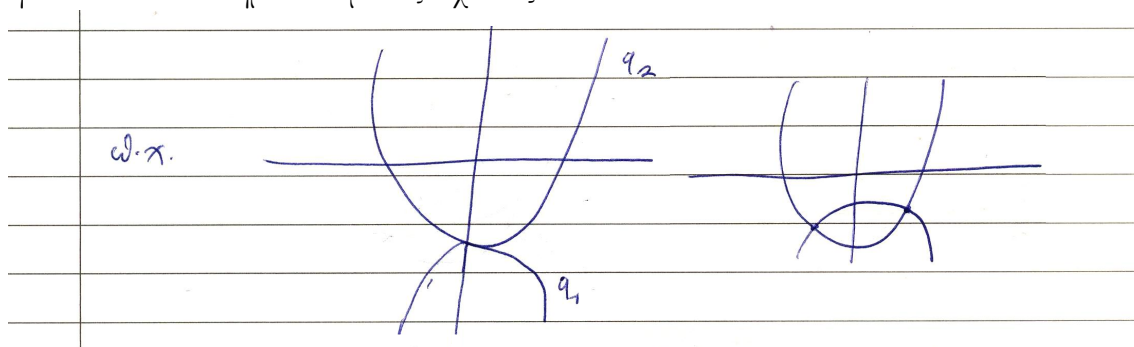
$$x_1 x_2 = \frac{-2 - 3\lambda}{\lambda - 1}.$$

Από τους τύπους του Viète, αδιαφορώντας

$$-\frac{3\lambda}{\lambda - 1} < 0, \quad \frac{-2 - 3\lambda}{\lambda - 1} > 0.$$

Οι συντελεστές στους οποίους αναφέρεται είναι του πολυωνύμου $q_1(y) - q_2(y)$.

Στη συνέχεια εξετάζει την περίπτωση κατά την οποία $\lambda < 0$. Αναφέρει ότι “θα έχουμε ανάλογες συνθήκες” καθώς και σε αυτή την περίπτωση οι παραβολές που ορίζουν τα δύο πολυώνυμα θα πρέπει να έχουν δύο κοινά σημεία με αρνητική τετμημένη ή κανένα κοινό σημείο. Ομοίως σχεδιάζει:



Τέλος εξετάζει την περίπτωση για την οποία $\lambda = 0$ και καταλήγει στην αναγκαία συνθήκη $\mu^2 > 4$. Εν κατακλείδι σημειώνει: “...τα παραπάνω σύνολα συνθηκών εξασφαλίζουν το ζητούμενο”.

Βλέπουμε λοιπόν κατ’ αρχάς ότι ο φοιτητής είναι ο μόνος αρκετά προσεκτικός ώστε να διακρίνει τις περιπτώσεις $\lambda \neq 0$ και $\lambda = 0$. Ξεκινά με την πρώτη περίπτωση, δίνοντας και αυτός αναγκαίες συνθήκες για τη διακρίνουσα του κάθε πολυωνύμου, και χωρίς να υποπέσει στο σφάλμα της 1ης κατηγορίας. Η ιδέα του στην περίπτωση αυτή φαίνεται πως είναι να βρει όλες τις θεμιτές δυνατές σχετικές θέσεις των δύο πολυωνύμων στο επίπεδο και έπειτα να τις περιγράψει με κάποια κατάλληλη αλγεβρική σχέση, από την οποία θα προκύψει συνθήκη για τα λ και μ . Η κατάλληλη αλγεβρική σχέση προκύπτει από κάποια παρατήρηση επί των σχημάτων. Το σχέδιο είναι καλό, αλλά παρουσιάζει ορισμένες δυσκολίες στην εκτέλεση, οι οποίες οδήγησαν το φοιτητή σε λάθη.

Πρώτη δυσκολία ή εύρεση όλων των θεμιτών δυνατών σχετικών θέσεων. Παρατηρούμε ότι ο φοιτητής δεν έχει λάβει υπ' όψιν το ενδεχόμενο να έχουν οι δύο παραβολές ένα κοινό σημείο ή την περίπτωση όπου το ένα εκ των δύο κοινών σημείων έχει μη αρνητική τεταγμένη, όπως π.χ. συμβαίνει για $\lambda = 0.1$ και $\mu = -1.5$. Παρεμπιπτόντως, αυτή η παράλειψη δεν δημιουργεί πρόβλημα διότι η αλγεβρική σχέση $q_1(y) = q_2(y) < 0$ ικανοποιείται για κάποιο y και σε αυτές τις περιπτώσεις. Έπειτα βλέπουμε ότι δεν καταφέρνει να “μεταφράσει” επιτυχώς σε κάποια συνθήκη το ενδεχόμενο των δύο σημείων τομής των πολυωνύμων $q_1(y)$ και $q_2(y)$ με αρνητικές τεταγμένες. Είναι εμφανές ότι η δυσκολία στο σημείο αυτό και πιθανόν η κόπωση τον οδήγησαν στο σφάλμα της απαίτησης αρνητικών τετμημένων για τα σημεία αυτά. Από τις υποδείξεις του φοιτητή για την υποπερίπτωση $\lambda < 0$ καταλαβαίνουμε ότι αν επιχειρούσε λεπτομερή εξέτασή της, θα αντιμετώπιζε αντίστοιχη τεχνική δυσκολία “μετάφρασης”. Κατά τα λοιπά, τόσο η απάντηση για την περίπτωση $\lambda = 0$, όσο και ο τρόπος συνολικής αντιμετώπισης του προβλήματος ήταν σωστοί.

Ερώτημα 5

Ποια από τα παρακάτω δεν είναι πολυώνυμο 2 μεταβλητών;
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

1. $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$
2. $ax_1^2 + \frac{b}{x_2^2} + x_1$
3. $-\sqrt{2}x_1 + 10x_2^4$
4. $\frac{x_2}{3} + \frac{\pi}{2}\sqrt{x_1^3}$

Απαντήσεις Ικανοποιητικές: 9 Συνολικές: 12

Κατ' αρχάς τρεις φοιτητές, οι 1B, 2Z και 2I δίνουν σωστή απάντηση χωρίς καμία αιτιολόγηση. Οι υπόλοιπες σωστές απαντήσεις μπορούν να ομαδοποιηθούν σε τρεις κατηγορίες. Στην πρώτη εξ αυτών συγκαταλέγονται τα γραπτά 1A και 2Γ.

Απάντηση γραπτού 1A: “είναι πολυώνυμο 2 μεταβλητών αν και μόνο αν γράφεται στην μορφή $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij}x^i y^j$, για κάποιους $m, n \in \mathbb{N}$ και $a_{ij} \in \mathbb{R}$.”

Απάντηση γραπτού 2Γ: “Δεν είναι το β και το δ διότι δεν είναι της μορφής $ax_1^\kappa x_2^\lambda$ όπου $\kappa \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{R}$.”

Οι δύο αυτοί φοιτητές επιχειρούν να περιγράψουν τη γενική μορφή του πολυωνύμου 2 μεταβλητών. Κατόπιν της περιγραφής αυτής θεωρούν προφανή την απάντηση όποτε δε σχολιάζουν περαιτέρω. Αν και το ερώτημα δεν αναφέρεται σε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, εντούτοις αμφότεροι το θεωρούν ως δεδομένο, πιθανότατα διότι όλες οι προηγούμενες ερωτήσεις είχαν αυτό το δεδομένο. Η λεπτομέρεια αυτή είναι ενδεικτική της επιρροής που ασκεί το συνολικό πλαίσιο ενός ερωτηματολογίου (διαγωνίσματος, κ.λπ.) στην κατανόηση μίας ερώτησης. Αυτή η αυθαιρεσία πάντως είναι άσχετη του ερωτήματος.

Κατά τα άλλα, η περιγραφή του πολυωνύμου 2 μεταβλητών από το φοιτητή 1Α είναι ακριβής. Όχι όμως και από το 2Γ, ο οποίος παραλείπει τα σύμβολα του διπλού άθροισματος. Θεωρούμε απίθανο να εννοούσε αυτό που έγραψε, διότι σε αυτή την περίπτωση θα απαντούσε ότι κανένα δεν είναι πολυώνυμο 2 μεταβλητών. Ο λόγος για τον οποίο ο φοιτητής αυτός υπέπεσε σε αυτό το σφάλμα δε μας είναι προφανής. Πιθανόν να δυσκολευόταν να το εκφράσει ως άθροισμα σε τυπική μαθηματική γλώσσα. Γί' αυτό προτίμησε μια ανακριβή διτύπωση, παρά ένα ακριβές μίγμα φυσικής και τυπικής γλώσσας του τύπου: “άθροισμα του οποίου οι όροι είναι της μορφής $ax_1^{\kappa}x_2^{\lambda}$, όπου $\kappa \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{R}$ ”, ή έστω μία διατύπωση σε αμιγώς φυσική γλώσσα. Βάσει αυτής της ερμηνείας, το εν λόγω σφάλμα είναι απότοκος της επικρατούσας αντίληψης στη διδασκαλία των μαθηματικών (σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης), που θεωρεί την τυπική μαθηματική γλώσσα εγκυρότερη της φυσικής. Είναι δηλαδή ενδεικτικό του αντίκτυπου του φορμαλισμού στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση.

Στη δεύτερη κατηγορία συγκαταλέγονται τα γραπτά 2Α και 2Η με όμοια λακωνική αιτιολόγηση.

2Α: “...επειδή έχουν μεταβλητές υψωμένες σε μη φυσικές δυνάμεις.”

2Η: “...γιατί τα πολυώμυμα έχουν πάντα φυσικό εκθέτη.”

Σε αντίθεση με τους πρώτους, αυτοί εδώ απλώς εκθέτουν μία ιδιότητα των πολυωνύμων, αφήνοντας να εννοηθεί ότι οι απορριφθείσες αλγεβρικές παραστάσεις δεν την πληρούν. Η ασάφεια της έννοιας “εκθέτης πολυωνύμου” που αναφέρει ο φοιτητής 2Η θα πρέπει μάλλον να εκληφθεί ως εκφραστική αστοχία.

Στην τρίτη κατηγορία συγκαταλέγονται τα γραπτά 2Β και 2ΣΤ.

Απάντηση γραπτού 2Β:

(β')	$ax_1^2 + \frac{b}{x_2^2} + x_1 = ax_1^2 + b x_2^{-2} + x_1$	όχι πολ/μο λόγω αρνητικότητας των εκθετών
(δ')	$\frac{x_2}{3} + \frac{9}{2} x_1^{9/2}$	όχι πολ/μο λόγω του ριζών εκθετών

Απάντηση γραπτού 2ΣΤ:

$$\begin{aligned}
 (\alpha') & x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 \\
 (\beta') & ax_1^2 + \left(\frac{b}{x_2}\right) + x_1 \quad \text{από το πολυώνυμο 1 μεταβλητών} \\
 (\gamma') & -\sqrt{2}x_1 + 10x_2^4 \\
 (\delta') & \frac{x_2}{3} + \frac{\pi}{2}\sqrt{x_1^3} = x_1^{1/3} \quad \text{από ένα πολυώνυμο 1 μεταβλητών}
 \end{aligned}$$

Οι φοιτητές αυτοί εξετάζουν ξεχωριστά κάθε υποψήφιο πολυώνυμο 2 μεταβλητών, επισημαίνοντας το μη επιτρεπτό εκθέτη σε κάθε απόρριψη. Σημειώνουμε ότι η διατύπωση “ρητός εκθέτης” του 2B προκειμένου για την αιτιολόγηση της απόρριψης του (δ') είναι άστοχη καθότι, ως γνωστόν, και οι φυσικοί εκθέτες είναι ρητοί! Αξιοσημείωτο επίσης είναι το αλγεβρικό σφάλμα του 2ΣΤ: “ $\sqrt{x_1^3} = x_1^{\frac{1}{3}}$ ”.

Και οι έξι φοιτητές που αιτιολόγησαν την απάντησή τους φαίνεται πως γνωρίζουν την έννοια του πολυωνύμου 2 μεταβλητών. Όσον αφορά όμως τη σχετική γνώση των τριών φοιτητών που έδωσαν ορθή αλλά ανατιολόγητη απάντηση, επιφυλασσόμαστε για τη διατύπωση οποιουδήποτε συμπεράσματος.

Παιρνάμε στις τρεις λανθασμένες απαντήσεις, εκ των οποίων η μία δεν είναι αιτιολογημένη.

Απάντηση γραπτού 2Δ:

“Ένα πολυώνυμο 2 μεταβλητών είναι της μορφής $f(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 + \beta x_1x_2 + \gamma x_2^2 + \delta x_1 + \varepsilon x_2 + z$. Τα (β'), (γ') και (δ') δεν είναι αυτής της μορφής.”

Απάντηση γραπτού 2Ε:

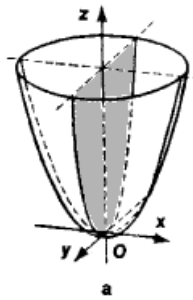
“Δεν είναι το δ διότι δεν είναι της μορφής $a_n x_1^n x_2^n + \dots + a_1 x_1 x_2 + a_0$, $n \in \mathbb{N}$. Το β είναι διότι $ax_1^2 x_2^2 + x_1 + bx_2^2$ ”

Απάντηση γραπτού 2Θ: “είναι όλα πολυώνυμα 2 μεταβλητών”

Το μόνο κοινό και των τριών απαντήσεων είναι ότι δηλώνουν άγνοια. Οι φοιτητές 2Ε και 2Θ προσπαθούν να περιγράψουν τη γενική μορφή ενός πολυωνύμου 2 μεταβλητών. Είναι εμφανής η προσπάθεια και των δύο να αποδώσουν σε αυτό “συμμετρική” μορφή ως προς τις δυνάμεις των δύο μεταβλητών. Η απάντηση 2Ε μαρτυρά πέραν της άγνοιας και σύγχυση καθώς το πολυώνυμο (β') δεν είναι καμίας από τις δύο μορφές που αναφέρει!

Ερώτημα 6α'

Έστω η επιφάνεια $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$. Για ποια ζεύγη τιμών (x, y) ισχύει ότι



$(\exists z)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0\right)$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Απαντήσεις Ικανοποιητικές: 5 Συνολικές: 10

Στο ερώτημα αυτό ζητείται ουσιαστικά να περιγραφεί η προβολή της δοθείσας επιφάνειας στο επίπεδο xOy . Η προβολή ταυτίζεται με το επίπεδο. Ορθή απάντηση έδωσαν ακριβώς οι μισοί από τους φοιτητές που απάντησαν, ωστόσο μόνο οι τρεις παρακάτω από τις πέντε απαντήσεις μπορούν να θεωρηθούν άψογες.

Απάντηση γραπτού 1Α: Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, αν θέσουμε

$$z = \frac{c}{a^2}x^2 + \frac{c}{b^2}y^2, \quad \text{τότε} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$$

Απάντηση γραπτού 2Α: “ $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \exists z = c\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ ”

Απάντηση γραπτού 2Δ: “Έχουμε ότι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0 \Rightarrow c\frac{x^2}{a^2} + c\frac{y^2}{b^2} = z$$

δηλαδή για όλα τα ζεύγη $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ μπορούμε να βρούμε z για τα οποία να ισχύει η ισότητα”.

Οι δύο ακόλουθες απαντήσεις, μολοντί επίσης ορθές, παρουσιάζουν προβλήματα στην αιτιολόγηση.

Απάντηση γραπτού 1Β:

Για όλα τα ζεύγη των (x, y) μπορούμε να
βρούμε κατάλληλο z ώστε να ικανοποιείται η
 $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ διότι τα x, y είναι
υψωμένα στο τετράγωνο.

Το γεγονός ότι τα x, y είναι υψωμένα στο τετράγωνο δε σχετίζεται με το ερώτημα. Ακόμα και αν δεν ήταν υψωμένα, πάλι θα υπήρχε για κάθε ζεύγος τιμών (x, y) κατάλληλο z ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση.

Απάντηση γραπτού 2B:

$$“(\exists z)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0\right) \Leftrightarrow (\exists z)\left(z = \frac{x^2}{\frac{a^2}{c}} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c}}\right)$$

‘Άρα είναι όλο το επίπεδο Oxy γιατί για όποιο z και να επιλέξω μπορώ να βρω μία έλλειψη του Oxy για να ισχύει η παραπάνω σηνθήκη.”

Το πρώτο σφάλμα στην αιτιολόγηση του 2B είναι ότι η μεταβλητή z δε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, όπως εμμέσως ισχυρίζεται. Για την ακρίβεια, αν το z πάρει τιμή ετερόσημη του c , τότε δεν υπάρχει ζεύγος (x, y) που να ικανοποιεί την εξίσωση. Μία δεύτερη λεπτομέρεια, που πιθανόν να παρέλειψε ο φοιτητής ως προφανή, είναι η αιτιολόγηση του ότι η ένωση όλων των ελλείψεων που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές του z είναι το επίπεδο xOy . Αναμφίβολα πάντως η απάντηση αυτή δείχνει μία προσπάθεια γεωμετρικής αντιμετώπισης του προβλήματος.

Οι απαντήσεις των φοιτητών 2Γ και 2Ε δείχνουν επίσης ότι οι φοιτητές προσπαθούν να “αποκωδικοποιήσουν” γεωμετρικά το πρόβλημα, ωστόσο κανένας από τους δύο δεν περιγράφει σαφώς το σύνολο των (x, y) .

Απάντηση γραπτού 2Γ: “Όλα τα σημεία της επιφάνειας”.

Απάντηση γραπτού 2Ε:

“Για τα ζεύγη τα οποία γεωμετρικά βρίσκονται στην επιφάνεια του παραβολοειδούς διότι αυτή η εξίσωση περιγράφει το παραβολοειδές.”

Τέλος, οι φοιτητές 2ΣΤ, 2Ζ, 2Η απαντούν πανομοιότυπα. Δίνουν το προφανές ζεύγος τιμών για το οποίο αληθεύει ο τύπος της εκφώνησης.

Απάντηση γραπτών 2ΣΤ, 2Ζ, 2Η: “Για $(x, y) = 0$ ”

Η απάντηση είναι εξαιρετικά άστοχη, καθώς οι φοιτητές θα μπορούσαν με μερικές αυθαίρετες απονομές τιμών στα x και y να καταλάβουν ότι τα επιθυμητά ζεύγη τιμών είναι πολλά περισσότερα από ένα! Αν μη τι άλλο, η απάντηση είναι δηλωτική παράλειψης ελέγχου του αποτελέσματος.

Ερώτημα 6β’

Μπορεί το σύνολο Π των σημείων της προβολής στο yOz να περιγραφεί ως $\Pi = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid g(y, z) \geq \text{ή} = \text{ή} \leq 0\}$ για κάποια κατάλληλη συνθήκη $g(y, z)$;

Απαντήσεις

Ικανοποιητικές: 3

Συνολικές: 7

Σε αυτό το ερώτημα ζητείται ρητά η περιγραφή της προβολής της επιφάνειας της εκφώνησης στο επίπεδο yOz . Σημειωτέον ότι η εν λόγω προβολή έχει σχηματισθεί στο δοθέν σχήμα. Καθώς το ερώτημα είναι παρεμφερές με το προηγούμενο, ήταν αναμενόμενο να απαντήσουν σε αυτό το πολύ όσοι φοιτητές απάντησαν και στο προηγούμενο. Οι τρεις λιγότεροι είναι αυτοί με την πανομοιότυπη και εντελώς άστοχη απάντηση στο προηγούμενο. Ξεκινάμε την παρουσίαση των απαντήσεων με τις τρεις σωστές:

Απάντηση γραπτού 1Α:

“Η προβολή στο yOz είναι $\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq \frac{b^2}{c}z\}$, άρα μπορεί να περιγραφεί”.

Απάντηση γραπτού 2Α:

$$\frac{z}{c} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq \frac{b^2}{c}z \quad \text{οπότε} \quad g(y, z) = \frac{z}{c} - \frac{y^2}{b^2} \geq 0$$

Απάντηση γραπτού 2Δ:

“Ναι, το yOz επίπεδο εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = 0$ άρα αντικαθιστώντας την αρχική εξίσωση έχουμε $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0 \Rightarrow z = \frac{c}{b^2}y^2$ το οποίο είναι παραβολή.

Και πρέπει $z \geq 0$ άρα $g(y, z) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c}$ και πρέπει $g(y, z) \geq 0$ ”.

Από την απάντηση του 2Δ είναι προφανές ότι ο φοιτητής βρίσκει την τομή του δοθέντος παραβολοειδούς με το επίπεδο yOz και όχι την προβολή του σε αυτό. Δεν αποτυπώνεται κάποιος σαφής συλλογισμός σε όσα γράφει. Αντ’ αυτού φαίνεται ότι το σχήμα τον βοήθησε ώστε να δώσει τελικά τη σωστή απάντηση, την οποία όμως αδυνατεί να αιτιολογήσει.

Ακολουθούν οι τέσσερις μη ικανοποιητικές απαντήσεις:

Απάντηση γραπτού 1Β:

“Ναι, π.χ. $g(z, y) \leq 0$ με $g(z, y) = y^2 - 2\frac{1}{2}\frac{a^2}{c}z$ ”. Η απάντηση αυτή είναι παρ’ ολίγον(!) σωστή. Για την ακρίβεια θα ήταν σωστή αν έγραφε b αντί για a . Πιθανότατα πρόκειται για σφάλμα εκ παραδρομής.

Απάντηση γραπτού 2Ε:

“Ναι με την παραβολή $z^2 \geq \frac{b^2}{c}y$ ”.

Άδηλος και ακατάληπτος ο τρόπος με τον οποίο έφτασε ο φοιτητής σε αυτό το αποτέλεσμα.

Απάντηση γραπτού 2Γ:

“Στην ουσία πρέπει με τη συνθήκη $g(y, z)$ να είναι δυνατόν να περιγραφεί όλο το

επίπεδο Π ".

Απ' ό,τι φαίνεται, ούτε η διαίσθησή του, ούτε το σχήμα της εκφώνησης βοήθησαν το φοιτητή 2Γ να ανακαλύψει και να περιγράψει τουλάχιστον γεωμετρικά τη σωστή απάντηση. Επιπλέον φαίνεται ότι δεν είναι σε θέση να εκφράσει το επίπεδο yOz με μία σχέση για τα y και z .

Απάντηση γραπτού 2B:

"Μπορεί να περιγραφεί ως $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(y, z) \geq 0\}$ ".

Ο 2B δε δίνει απάντηση επί της ουσίας, αφού δεν δίνει καμία πληροφορία για την παράσταση $g(y, z)$.

3.2.3 Αποτελέσματα ανά σκοπό

Σχετικά με τους τρεις βασικούς σκοπούς:

1. Όσον αφορά τα πολυώνυμα δευτέρου βαθμού βλέπουμε ότι σε γενικές γραμμές οι φοιτητές ανταποκρίνονται ικανοποιητικά στα ερωτήματα, με εξαίρεση το ερώτημα 1ε'. Τα σφάλματα στο ερώτημα 1. πιθανολογούμε ότι οφείλονται κυρίως στην προσκόλληση στη διαισθητική εικόνα του παραβολικού γραφήματος του πολυωνύμου με τα κοίλα προς τα άνω.

Όσον αφορά τα πολυώνυμα τρίτου βαθμού, βλέπουμε ότι οι φοιτητές όχι μόνο δεν έχουν εντριφήσει σε σχετικά ερωτήματα αλλά στερούνται και διαισθητικής εικόνας του γραφήματος ενός πραγματικού πολυωνύμου τρίτου βαθμού.

2. Το μόνον ερώτημα που διερευνά την αντίληψη της έννοιας πολυωνύμου δυο μεταβλητών είναι το 5. Για την ακρίβεια ζητείται η αναγνώρισή τους. Βλέπουμε ότι τα 3/4 των φοιτητών που ασχολήθηκαν με το ερώτημα (9/12) έδωσαν σωστή απάντηση. Εξαιτίας της ευκολίας του ερωτήματος θεωρούμε πιθανότατο το ενδεχόμενο ότι, όσοι δεν απάντησαν, το έκαναν από αβεβαιότητα για τη σωστή απάντηση. Με αυτή την παραδοχή το ποσοστό των φοιτητών που γνωρίζουν με βεβαιότητα την έννοια του πολυωνύμου δύο μεταβλητών πέφτει στο 56 % (9/16).

3. Η διερεύνηση που αναφέρεται εδώ αφορά έμμεσα στο ερώτημα 6α' και άμεσα στο 6β'. Στο 6α' δίνουν σωστή απάντηση οι μισοί από τους φοιτητές που ασχολούνται μαζί του (5/10). Οι τέσσερις από αυτούς χειρίζονται αλγεβρικά το ερώτημα, ενώ ο πέμπτος, ο 2B, προσπαθεί να το αποκωδικοποιήσει γεωμετρικά. Στο 6β' απαντούν σωστά μόλις 3 από τους 7 (43%). Το γεγονός ότι το ζητούμενο σύνολο είναι σχηματισμένο στο δοθέν σχήμα, χωρίς όμως να επισημαίνεται στην εκφώνηση, δε φαίνεται να βοήθησε πολύ τους φοιτητές. Γεγονός που σημαίνει είτε ότι δεν αντιλήφθηκαν τη σύνδεση σχήματος και ερωτήματος, είτε ότι το βοηθητικό στοιχείο αυτό

δεν ήταν αρκετό, δηλαδή ότι είχαν πρόβλημα στην αλγεβρική έκφραση της σκιασμένης επιφάνειας του σχήματος. Σε κάθε περίπτωση τα αποτελέσματα των δύο ερωτημάτων δείχνουν μία γενική αδυναμία των φοιτητών στην αντιμετώπιση προβλημάτων με προβολές επιφανειών σε επιφάνειες, είτε με αλγεβρικό τρόπο, είτε με γεωμετρικό.

Σχετικά με τους δύο δευτερεύοντες σκοπούς:

1. Τα ερωτήματα στα οποία διερευνάται η αντίληψη της ισοδύναμης συνθήκης είναι τα 1δ', 1ε', 3ε' 3ς' και 4. Σε όλα αυτά τα ερωτήματα εμφανίζονται συχνά αναληθείς ισχυρισμοί για ισοδύναμες συνθήκες οι οποίες στην πραγματικότητα δεν είναι. Τα σφάλματα που εμφανίζονται στο ερωτηματολόγιο παρουσιάζουν εν πολλοίς κάποιες συγκεκριμένες μορφές ανά ερώτημα. Στα 1δ' και 1ε' παρουσιάζεται η σύζευξη μέρους του συνόλου των ικανών συνθηκών ως ικανή και αναγκαία. Η παράλειψη κάποιων ικανών συνθηκών θα πρέπει μάλλον να θεωρηθεί αβλεψία παρά πρόβλημα στην διερευνόμενη αντίληψη. Στο 3ς' παρουσιάζεται η ενδιαφέρουσα απάντηση ότι δεν υπάρχει ισοδύναμη συνθήκη. Φαίνεται δηλαδή ο φοιτητής να μην αποδέχεται την ύπαρξη αναληθών συνθηκών (αντιλογιών). Στο ερώτ. 4 βλέπουμε εκτεταμένη εμφάνιση του σφάλματος του επιμερισμού της σύζευξης ως προς την υπαρξιακή ποσόδειξη η οποία προφανώς δε δίνει τύπο ισοδύναμο με τον αρχικό. Η απάντηση των φοιτητών 2B και 2E επίσης δείχνουν προβληματική αντίληψη της ισοδύναμης συνθήκης ή ελλιπή κατανόηση της διαδικασίας επίλυσης συστήματος.

2. Όταν αναφερόμαστε στον τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος, εννοούμε κυρίως τις επιλογές των φοιτητών από το γνωστικό τους οπλοστάσιο για την αντιμετώπιση του κάθε προβλήματος. Με εξαίρεση το ερώτημα 4, τα υπόλοιπα ερωτήματα στα οποία αναφέρεται ο προβληματισμός δεν είναι πολύπλοκα ώστε να απαιτούν την κατάστρωση κάποιου ευφυούς σχεδίου. Καθώς τα υπό εξέταση ερωτήματα με εξαίρεση το 6, βρίσκονται σε γνωστικό πλαίσιο με το οποίο οι φοιτητές έρχονται σε επαφή ήδη από τα Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (θεωρία πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές), παρατηρείται ποικιλία στους τρόπους προσέγγισης των προβλημάτων, με γνώσεις είτε από το Σχολείο, είτε από το Πανεπιστήμιο, άλλες εύστοχες και άλλες άστοχες επιλογές. Παρατηρείται δηλαδή ένας ανταγωνιστικός ρόλος γνωστικών εφοδίων σε αλληλοεπικαλυπτόμενο πεδίο εφαρμογής. Σχετικά με την αναμενόμενη γενίκευση από το ερώτημα 2 στο ερώτημα 3α', φαίνεται μόνο οι δύο από τους τρεις που έδωσαν σωστή απάντηση στο 2 να συνειδητοποιήσαν τη γενίκευση του αποτελέσματος. Το δείγμα είναι υπερβολικά μικρό για οποιοδήποτε συμπέρασμα! Σχετικά με το ερώτ. 4, βλέπουμε ότι μόνο ένας φοιτητής είχε την υπομονή και την ικανότητα να εξετάσει διεξοδικά το πρόβλημα και να καταστρώσει ένα σχέδιο, το οποίο δυστυχώς

περιείχε κάποια ουσιώδη σφάλματα.

3.3 Συμπεράσματα-Παρατηρήσεις

Οι απαντήσεις του ερωτηματολογίου σε αυτό το μικρό δείγμα των δεκαέξι εθελοντών φοιτητών έδειξαν γνωστικά κενά στα εξής στοιχειώδη θέματα:

- εύρεση ρίζας πολυωνύμου τρίτου βαθμού μίας μεταβλητής με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές,
- επίγνωση του γεγονότος ότι τα πραγματικά πολυώνυμα τρίτου και εν γένει περιττού βαθμού έχουν ρίζα,
- αντίληψη της έννοιας του πολυωνύμου δύο μεταβλητών,

καθώς και σε δύο πιο εξεζητημένα:

- αντιμετώπιση συστήματος πολυωνυμικής εξίσωσης και ανίσωσης,
- εύρεση και περιγραφή προβολών σε επίπεδο υποσυνόλων του $\mathbb{R}^3$ που περιγράφονται από έναν πολυωνυμικό τύπο.

Τα αποτελέσματα αυτά βέβαια δεν είναι δυνατόν να χαρακτηριστούν τα πλέον αξιόπιστα! Ασφαλώς η έρευνά μας έχει πολλές αδυναμίες. Πρωτίστως η έλλειψη άλλων ερευνητικών εργαλείων όπως η συνέντευξη, καθώς κάτι τέτοιο ήταν ανέφικτο υπό τις συνθήκες που διεξήχθη. Η επανάληψη της διανομής του ερωτηματολογίου σε άλλα ακροατήρια είναι αναγκαία προκειμένου για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων. Επιπλέον το σχετικά μικρό χρονικό διάστημα για την απάντηση του ερωτηματολογίου από τους φοιτητές, αλλά και το χαλαρό ενδιαφέρον με το οποίο ενδεχομένως πολλοί από αυτούς αντιμετώπισαν το όλο εγχείρημα, είναι παράγοντες που επηρεάζουν σαφώς επί τα χείρω τα αποτελέσματα.

Για τους λόγους αυτούς, ο όρος “δοκιμή έρευνας” θα ήταν ίσως καταλληλότερος για την περιγραφή του εγχειρήματος, του οποίου ο κύριος σκοπός είναι η μύηση του γράφοντα στην ερευνητική διαδικασία της διδακτικής των μαθηματικών και ταυτόχρονα η περιγραφή μίας ερευνητικής πρότασης με τον προσανατολισμό που αναφέρεται στην εισαγωγή του κεφαλαίου.

Τα αποτελέσματα λοιπόν της ερευνητικής μας δοκιμής δείχνουν, δεδομένης και της χρηστικής αξίας της θεωρίας πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, ότι είναι

απαραίτητη μία πιο συστηματική διαπραγμάτευση των στοιχειωδών αποτελεσμάτων αυτής στο προπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών ενός τμήματος Μαθηματικών.

Βιβλιογραφία

- [1] Τ. Πατρώνη, Δ. Σπανού, *Σύγχρονες Θεωρήσεις και Έρευνες στη Μαθηματική Παιδεία*, 2η εκδ., εκδ. Γ. Α. Πνευματικού, Αθήνα, 2000.
- [2] A. Tarski, J. C. C. McKinsey, *A decision method for elementary algebra and geometry*, 2nd ed., RAND Corporation monograph, Santa Monica, California, 1957.
- [3] A. Tarski, J. C. C. McKinsey, *A decision method for elementary algebra and geometry*, 1st ed. rev., University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.
- [4] A. Tarski, Sur les ensembles définissables de nombres réels, *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 17, Issue: 1, 1931, page 210-239.
- [5] L. van den Dries, Alfred Tarski's Elimination Theory for Real Closed Fields, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 53, No 1, Mar. 1988, pp. 7-19.
- [6] L. van den Dries, A generalisation of the Tarski-Seidenberg theorem, and some nondefinability results, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 15, No 2, Oct. 1986, pp. 189-193.
- [7] A. Seidenberg, A new decision method for elementary algebra, *Annals of Mathematics*, vol. 60, No 2, Sep. 1952, pp. 365-374.
- [8] R. Thom, La stabilité topologique des applications polynomiales, *L'Enseignement Mathématique*, ser. 2, vol. 8, 1962, pp. 24-33.
- [9] A. Robinson, Relative model-completeness and the elimination of quantifiers, *Dialectica*, vol. 12, 1958, pp. 394-407.

- [10] P. J. Cohen, Decision procedures for real and p-adic fields, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, pp. 243-289.
- [11] L. Gonzalez , H. Lombardi, T. Recio, M. F. Roy, Spécialisation de la suite de Sturm et sous-résultants, *Informatique Théorique et applications*, tome 24, No 6, 1990, pp. 561-588.
- [12] S. Givant, A. Tarski, Tarski's system of geometry, *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 5, No 2, June 1999, pp. 175-214.
- [13] S. Feferman, *Tarski's influence on computer science*, LICS 2005.
- [14] D. Haskell, A. Pillay, C. Steinhorn, *Model Theory, Algebra and Geometry*, Cambridge University Press, 1st published 2000.
- [15] A. Carvajal, I. Ray, and S. Snyder, *Equilibrium Behavior in Markets and Games: Testable Restrictions and Identification*, E-mail: acarvaes@banrep.gov.co; Fax: +57.1.342.1804., Sep. 2003.
- [16] F. Kubler, K. Schmedders, *Competitive Equilibria in Semi-Algebraic Economies*, kubler@sas.upenn.edu, Jul. 23 2007.
- [17] F. Kubler, K. Schmedders, *Schwartz functions on Nash manifolds*, arXiv:0704.2891v3 [math.AG] 5 Dec 2007