ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διαγώνισμα Σεπτεμβρίου 2014

(1) Δείξτε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες με την $p \to (q \vee r)$. Χρησιμοποιήστε απλούς λογικούς κανόνες, όχι πίνακες αλήθειας.

(α) $q \vee (\neg p \vee r)$,

(β) $(p \wedge \neg r) \to q$.

(α) Λόγω προσεταιριστικής ιδιότητας και συνεπαγωγής, $q \vee (\neg p \vee r) \Leftrightarrow \neg p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow p \to (q \vee r)$. Άρα, από την μεταβατικότητα της λογικής ισοδυναμίας, παίρνουμε ότι $q \vee (\neg p \vee r) \Leftrightarrow p \to (q \vee r)$.

(β) Λόγω De Morgan, $(p \wedge \neg r) \to q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg r) \vee q \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg\neg r) \vee q \Leftrightarrow q \vee (\neg p \vee r)$, οπότε από την περίπτωση (α) παίρνουμε πως $p \wedge \neg r \to q \Leftrightarrow p \to (q \vee r)$.

(2) Αποδείξτε ότι η πρόταση $\neg q$ είναι λογικό συμπέρασμα των παρακάτω υποθέσεων (a)-(e). Αιτιολογήστε κάθε αποδεικτικό βήμα μέσω των υποθέσεων και των κύριων λογικών κανόνων συναγωγής:

$$\begin{array}{ll} (a) & (\neg p \vee q) \to r \\ (b) & s \vee \neg q \\ (c) & \neg t \\ (d) & p \to t \\ (e) & (\neg p \wedge r) \to \neg s \end{array}$$

	Απόδειξη	**Αιτιολόγηση**
(1)	$\neg p$	υποθέσεις (c), (d) και κανόνας modus tollens
(2)	$\neg p \vee q$	(1) και κανόνας προσθήκης
(3)	r	(2), υπόθεση (a) και κανόνας modus ponens
(4)	$\neg p \wedge r$	(1), (3) και κανόνας απλοποίησης
(5)	$\neg s$	(4), υπόθεση (e) και κανόνας modus ponens
$\therefore$	$\neg q$	(5), υπόθεση (b) και κανόνας διαζευκτικού συλλογισμού.

(3) (α) Βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ σε ακέραιους αριθμούς $x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, x_3 \geq 2, x_4 \geq -1$.
(β) Βρείτε το πλήθος των μεταθέσεων των γραμμάτων της λέξης ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, στις οποίες περιέχεται η υπολέξη ΤΙΚ.

(α) Προφανώς, η εξίσωση μετασχηματίζεται στην $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 18$, όπου $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - 1, y_3 = x_3 - 2$ και $y_4 = x_4 + 1$. Επομένως, ο αριθμός των λύσεων είναι $\binom{4+18-1}{18} = \binom{21}{18} = 1330$.

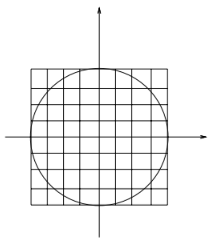
(β) Στη λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, θεωρώντας την υπολέξη ΤΙΚ ως σύμβολο, το Α επαναλαμβάνεται 3 φορές και το Μ 2 φορές: άρα, το ζητούμενο πλήθος μεταθέσεων είναι $\frac{8!}{3!2!} = 3360$.

(4) (α) Δείξτε ότι μεταξύ οποιωνδήποτε 52 αριθμών από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, 101\}$ υπάρχουν πάντα δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 102.
(β) Δίνονται 61 σημεία στο εσωτερικό ενός κύκλου ακτίνας 4. Δείξτε ότι τουλάχιστον δύο από αυτά τα σημεία απέχουν απόσταση το πολύ $\sqrt{2}$.

(α) Θεωρούμε τον διαμερισμό του $[101]$ στις 51 περιστεροφωλιές $\{1, 101\}, \{2, 100\}, \ldots, \{50, 52\}, \{51\}$, που είναι τέτοιες ώστε οι πρώτες 50 έχουν άθροισμα των στοιχείων τους ίσο με 102, ενώ καμιά πλην της τελευταίας δεν περιέχει το 51. Επομένως, επιλέγοντας 52 αριθμούς από το σύνολο αυτό, υποχρεωτικά θα τοποποθετηθούν δυο αριθμοί μέσα σε κάποια από τις πρώτες

50 περιστεροφωλιές.

(β) Τοποθετούμε τον κύκλο μέσα σε ένα τετραγωνικό πλέγμα αποτελούμενο από $8 \times 8 = 64$ τετράγωνα πλευράς 1. Καθώς $3^2 + 3^2 > 4^2$, τα τέσσερα γωνιακά τετράγωνα βρίσκονται εκτός του κύκλου, που σημαίνει ότι το εσωτερικό του κύκλου τέμνει το πολύ 60 τετράγωνα, μέσα στα οποία θα επιλεγούν 61 σημεία. Επομένως, από την αρχή της περιστεροφωλιάς, δυο σημεία θα βρίσκονται υποχρεωτικά μέσα στο ίδιο τετράγωνο (πλευράς 1), οπότε η απόστασή τους θα είναι το πολύ $\sqrt{2}$.



(5) Μέσω της αρχής εγκλεισμού–αποκλεισμού, βρείτε το πλήθος των συμβολοσειρών από 0 και 1, οι οποίες έχουν μήκος 7 και δεν περιέχουν πέντε διαδοχικά 1.

Έστω A_1 το σύνολο όλων των συμβολοσειρών μήκους 7 με 1 στις πρώτες 5 θέσεις, A_2 με 1 στις θέσεις 2–6 και A_3 με 1 στις θέσεις 3–7. Θέλουμε να μετρήσουμε το πλήθος x των συμβολοσειρών μήκους 7 που βρίσκονται εκτός του $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Πρώτα, παρατηρούμε ότι το πλήθος των συμβολοσειρών (από 0 και 1) μήκους 7 είναι $2^7 = 128$. Επιπλέον, $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^2 = 4$, διότι οι ελεύθερες θέσεις είναι 2 σε κάθε περίπτωση, και, προφανώς, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$, αφού υπάρχει μόνο μια τέτοια συμβολοσειρά (με 1 σε όλες τις θέσεις). Τέλος, $|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = 2$, αφού υπάρχει μόνο μια ελεύθερη θέση, ενώ $|A_1 \cap A_3| = 1$, αφού δεν υπάρχει καμία ελεύθερη θέση (όλες 1). Επομένως, παίρνουμε $x = 128 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 128 - [(|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|] = 128 - [(4 + 4 + 4) - (2 + 2 + 1) + 1] = 120$.

(6) Αποδείξτε συνδυαστικά ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} = \binom{2n}{n+1}.$$

Το δεξιό μέρος της ισότητας αυτής είναι φυσικά η καταμέτρηση όλων των $(n+1)$–υποσυνόλων του συνόλου $[2n]$. Αλλά και το αριστερό μέρος υλοποιεί την ίδια καταμέτρηση, αν αρχικά επιλέξουμε k στοιχεία του συνόλου $[n]$, κάτι που μπορεί να γίνει με $\binom{n}{k}$ τρόπους και, στη συνέχεια, επιλέξουμε τα υπόλοιπα $n + 1 - k$ στοιχεία από το σύνολο $\{n + 1, n + 2, \ldots, 2n\}$, που γίνεται με $\binom{n}{n-k+1} = \binom{n}{k-1}$ τρόπους (αθροίζοντας φυσικά για όλα τα $k = 1, 2, \ldots, n$). Εναλλακτικά, η ισότητα πρκύπτει με σύγκριση των συντελεστών του x^{n+1} στα διωνυμικά αναπτύγματα των δύο μελών της ισότητας $(x+1)^n(x+1)^n = (x+1)^{2n}$.

(7) Μέσω συνήθων γεννητριών συναρτήσεων να επιλυθεί η αναδρομική σχέση που δίνεται από $a_0 = 3$, $a_1 = -12$ και $a_n = -5a_{n-1} + 36a_{n-2}$, για $n \geq 2$.

Ως συνήθως, πολλαπλασιάζοντας την αναδρομική εξίσωση με x^n και αθροίζοντας, βρίσκουμε τελικά $G(x)(1 + 5x - 36x^2) = 3 + 3x$. Επομένως, $G(x) = (3 + 3x)\Big(\frac{1}{(1+9x)(1-4x)}\Big) = (3 + 3x)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k}(-9)^j 4^{k-j}\Big)x^k\Big) = (3 + 3x)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} 4^k \Big(\sum_{j=0}^{k}(-\frac{9}{4})^j\Big)x^k\Big) = (3+3x)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} 4^k\Big(\frac{(-\frac{9}{4})^{k+1}-1}{(-\frac{9}{4})-1}\Big)x^k\Big) = (3+3x)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{13}(-(-9)^{k+1}+4^{k+1})x^k\Big) = \frac{3}{13}(1+x)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-(-9)^{k+1}+4^{k+1})x^k\Big) = \frac{3}{13}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-(-9)^{k+1} - (-9)^k + 4^{k+1} + 4^k)x^k\Big) = \frac{3}{13}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(8 \cdot (-9)^k + 5 \cdot 4^k)x^k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{24}{13}(-9)^k + \frac{15}{13} \cdot 4^k)x^k$. Συνεπώς, $a_n = \frac{24}{13}(-9)^n + \frac{15}{13} \cdot 4^n$, για $n \geq 0$. Διαφορετικά, κάνουμε την ανάλυση σε απλά κλάσματα $\frac{3(1+x)}{(1+9x)(1-4x)} = \frac{A}{1+9x} + \frac{B}{1-4x}$ για να βρούμε $A = \frac{24}{13}$ και $B = \frac{15}{13}$.

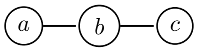
(8) Δείξτε ότι αν ένας γράφος έχει ακριβώς δυο κορυφές περιττού βαθμού, τότε οι κορυφές αυτές συνδέονται με μια διαδρομή.

Αν οι δυο κορυφές περιττού βαθμού δεν συνδέονται με καμιά διαδρομή, τότε θα ανήκουν σε δυο διαφορετικές συνδεδεμένες συνιστώσες του γράφου. Αλλά από γνωστό θεώρημα, σε κάθε συνδεδεμένη συνιστώσα του γράφου, το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού πρέπει να είναι άρτιο. Επομένως, ο γράφος περιέχει 4 κορυφές περιττού βαθμού, που είναι αντίφαση.

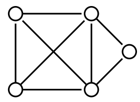
(9) Ένα δένδρο λέγεται δυαδικό αν έχει μοναδική κορυφή βαθμού 2 (η ρίζα του δένδρου), ενώ κάθε άλλη κορυφή είτε έχει βαθμό 1 (οπότε λέγεται φύλλο) ή έχει βαθμό 3. Δείξτε ότι σε ένα δυαδικό δένδρο n κορυφών το πλήθος των φύλλων είναι $\frac{1}{2}(n+1)$.

Έστω k το πλήθος των φύλλων του δένδρου αυτού. Τότε το άθροισμα των βαθμών των n κορυφών είναι $k+2+3(n-k-1) = 3n-2k-1$. Αλλά, από γνωστό θεώρημα, το άθροισμα των βαθμών του δένδρου αυτού είναι $2(n-1)$, καθώς $n-1$ είναι το πλήθος των ακμών του. Επομένως, βρίσκουμε $k = \frac{1}{2}(n+1)$.

(10) (α) Χρησιμοποιώντας τον πίνακα γειτνίασης, για τον παρακάτω γράφο βρείτε το πλήθος των περιπάτων μήκους 2 από b ως c και το πλήθος των περιπάτων μήκους 3 από a ως b.



(β) Βρείτε το πλήθος όλων των κυκλικών υπογράφων του παρακάτω γράφου:



(α) Ο πίνακας γειτνίασης είναι $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, οπότε βρίσκουμε $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ και $A^3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Επειδή το στοιχείο $(2,3)$του A^2 είναι 0, δεν υπάρχει κανένας περίπατος μήκους 2 από b ως c. Επειδή το στοιχείο $(1,2)$του A^3 είναι 2, υπάρχουν 2 περίπατοι μήκους 3 από a ως b.

(β) Υπάρχουν 5 τρίγωνα, 3 τετράπλευρα και 1 πεντάπλευρο.