Πειράματα Προσομοιώσεων Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους πάνω σε Γράφους

Μωυσής Α. Μπουντουρίδης

mboudour@upatras.gr

Τέταρτη Ημερίδα με Θέμα
"Εφαρμογές Διαφορικών Εξισώσεων"
Αμφιθέατρο Σχολής Θετικών Επιστημών ΑΘΕ12
1 Οκτωβρίου 2016

Scripts & simulations:
https://github.com/mboudour/SocInlfluenceSims

Διάχυση

- **Το ΠΑΣΤ της Διάχυσης**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha \Delta u, x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) &= f(x,t), x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), x \in \Omega \ (\text{όπου } f(x,0) = g(x), x \in \partial\Omega). \end{aligned}$$

- **Διακριτοποίηση σε Χώρο και Χρόνο**

$$\begin{aligned} u(x,t+\delta t) &= u(x,t) + u_t(x,t)\delta t + O(\delta t^2), \\ u(x+\delta x,t) &= u(x,t) + u_x(x,t)\delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t)(\delta x)^2 + O((\delta x)^3), \\ u(x-\delta x,t) &= u(x,t) - u_x(x,t)\delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t)(\delta x)^2 + O((\delta x)^3), \\ u_t(x,t) &= \frac{u(x,t+\delta t) - u(x,t)}{\delta t} + O(\delta t), \\ u_{xx}(x,t) &= \frac{u(x-\delta x,t) - 2u(x,t) + u(x+\delta x,t)}{\delta x^2} + O((\delta x)^2). \end{aligned}$$

- **Η Περίπτωση Μονο-Διάστατου Πλέγματος**

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x_j : j = 1, \ldots, n\}, \\ \partial\Omega &= \{x_1, x_n\}, \\ t &\in \{t_m : m = 0, 1, \ldots\}. \end{aligned}$$

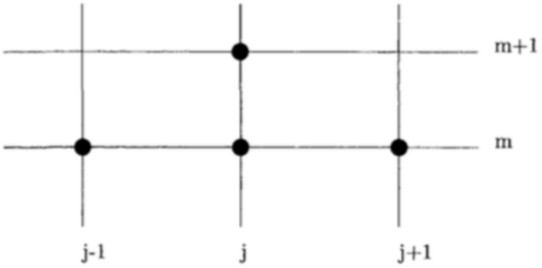


FIGURE 4.1. *The computational molecule of the explicit scheme.*

- **Συμβολισμοί**

$$
\begin{aligned}
x_j &= j, \quad j = 1, \ldots, n, \\
t_m &= m, \quad m = 0, 1, \ldots, \\
u(x_j, t_m) &= u_j^m, \\
f(x_j, t_m) &= f_j^m, \\
g(x_j) &= g_j.
\end{aligned}
$$

- **Η Παράμετρος** r

$$
r = \alpha \frac{\delta t}{(\delta x)^2}.
$$

Το Μονο-Διάστατο Πλέγμα Ω ως Γράφος

- **Η Διακριτή Εξίσωση της Διάχυσης**

$$\begin{aligned} u_j^{k+1} - u_j^k &= r(u_{j-1}^k + u_{j+1}^k) - 2ru_j^k, j \in \Omega, k = 0, 1, \dots, \\ u_j^k &= f_j, j \in \partial\Omega, k = 0, 1, \dots, \\ u_j^0 &= g_j, j \in \Omega. \end{aligned}$$

- **Συνθήκη Ευστάθειας**

$$r < \frac{1}{2}$$

- Γειτνίαση Κόμβων του Ω

$$i \sim j \Leftrightarrow |i - j| = 1.$$

- **Πίνακας Γειτνίασης**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Οι Βαθμοί των Κόμβων του** Ω

$$\deg_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{για } i = 2, \ldots, n-1, \\ 1, & \text{φγια } i = 1, n. \end{cases}$$

- **Συμβολισμοί**
  - Συμβολίζουμε με D τον διαγώνιο **πίνακα βαθμών** με $D_{ii} = \deg_i$.
  - Συμβολίζουμε με I τον διαγώνιο **μοναδιαίο πίνακα** με $I_{ii} = 1$.

- Τότε η διακριτή εξίσωση της διάχυσης σε *διανυσματική μορφή* γράφεται ως:

$$\begin{aligned} u^{k+1} - u^k &= r(A - D)u^k = \\ &= -rLu^k, \text{ στο } \Omega, k = 0, 1, \ldots, \\ u^k &= f, \text{ στο } \partial\Omega, k = 0, 1, \ldots, \\ u^0 &= g, \text{ στο } \Omega. \end{aligned}$$

όπου ο πίνακας (τάξης $n \times n$) $L = D - A$ είναι ο **(συνδυαστικός) Λαπλασιανός πίνακας** $L = L_{ij}$ του γράφου Ω:

$$L_{ij} = \begin{cases} \deg_i, & \text{όταν } i = j, \\ -1, & \text{όταν } i \sim j, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- Έστω $G = (V, E)$ ένας (γενικός) γράφος, τέτοιος ώστε το σύνολο των κόμβων του V να διαμερίζεται στα εξής δυο υποσύνολα κόμβων:

$$V = \Omega \cup \partial\Omega,$$

υποθέτοντας ότι

$$\partial\Omega = \{x \notin \Omega \colon \exists y \in S \text{ τέτοια ώστε } y \sim x\}.$$

- Η **διακριτή εξίσωση διάχυσης πάνω στο G με συνοριακές συνθήκες Dirichlet** είναι (σε διανυσματική μορφή):

$$\begin{aligned} u^{k+1} - u^k &= -rLu^k, \text{ στο } \Omega, k = 0, 1, \ldots, \\ u^k &= 0, \text{ στο } \partial\Omega, k = 0, 1, \ldots, \\ u^0 &= g, \text{ στο } \Omega. \end{aligned}$$

όπου L είναι ο **Λαπλασιανός πίνακας** του G.

- Έστω **γράφος** $G = (V, E)$ με n **κόμβους** $\equiv$ **ανθρώπους**.
- Για κάθε άνθρωπο $i \in V$ και χρόνο $k = 0, 1, 2, \dots$ (για την περίπτωση διακριτού χρόνου, που θεωρούμε εδώ), συμβολίζουμε με $v_i^k \in \mathbb{R}$ την **γνώμη** που έχει ο άνθρωπος i τον χρόνο k.
- Η *γνώμη* του i τον χρόνο t επικαιροποιείται τον επόμενο χρόνο $t+1$ σύμφωνα με την εξής εξίσωση του **Μοντέλου Κοινωνικής Επιρροής των DeGroot–Friedkin–Johnsen**:

$$v_i^{k+1} = s_i N v_i^k + (1 - s_i) v_i^0,$$

  - όπου $N v_i^t$ είναι ο *μέσος όρος* των *γνωμών* των *γειτόνων* του i
  - και η παράμετρος s_i, που ορίζεται μέσα στο διάστημα $(0, 1]$, ονομάζεται **συντελεστής επιδεκτικότητας (susceptibility coefficient)** του ανθρώπου (κόμβου) i.

Παρατηρήσεις για τον συντελεστή επιδεκτικότητας

- Αν $s_i = 0$, τότε η γνώμη του i δεν αλλάζει ($v_i^k = v_i^0$, για κάθε χρόνο $k = 1, 2, \ldots$). Ένας τέτοιος άνθρωπος ονομάζεται **πεισματάρης** ή **επίμονος** στην γνώμη που κρατά.
- Αν $s_i = 1$, τότε ο i υιοθετεί τη μέση τιμή Nv_i^t των γνωμών των γειτόνων του. Ένας τέτοιος άνθρωπος ονομάζεται **πλήρως εύπλαστος** ή **πλήρως συμμορφούμενος** με τις γνώμες των γειτόνων του.
- Αν $0 < s_i < 1$, τότε η γνώμη του i παρεμβάλεται μεταξύ της μέσης γειτονικής γνώμης Nv_i^t και της αρχικής γνώμης v_i^0, έτσι ώστε η ακριβής θέση της παρεμβολής να ζυγίζεται από το s_i.

Παρατηρήσεις για τον πίνακα N

- Ο πίνακας N, ονομάζεται **πίνακας τυχαίων βηματισμών (random walk matrix)** πάνω στον γράφο G.
  - Συμβολίζοντας με A, D τον πίνακα γειτνίασης και βαθμών του G, ισχύει ότι
$$N = D^{-1}A.$$
  - Επιπλέον, συμβολίζοντας με L, I τον Λαπλασιανό και τον μοναδιαίο πίνακα του G, ισχύει ότι
$$N = I - D^{-1}L.$$

Αναγωγή του Προβλήματος Κοινωνικής Επιρροής σε Πρόβλημα Διάχυσης

- Συμβολίζοντας με S τον διαγώνιο πίνακα (τάξης $n \times n$), του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με τους συντελεστές επιδεκτικότητας s_i, αν

$$S = I$$

(δηλαδή, αν όλοι οι άνθρωποι είναι πλήρως εύπλαστοι), τότε οι εξισώσεις του μοντέλου κοινωνικής επιρροής των DeGroot–Friedkin–Johnsen γράφονται (σε διανυσματική μορφή):

$$v^{k+1} = N v^k,$$

δηλαδή, αφού $N = I - D^{-1} L$,

$$v^{k+1} - v^k = -D^{-1} L v^k,$$

που είναι η εξίσωση διάχυσης με **μεταβλητό συντελεστή διάχυσης** ίσος προς D^{-1}.

Αναγωγή του Προβλήματος Διάχυσης σε Πρόβλημα Κοινωνικής Επιρροής

- Αν ο G είναι ένας d–κανονικός γράφος, για κάποιο αρκετά μεγάλο ακέραιο d, και
$$r = \frac{1}{d},$$
τότε η εξίσωση της διάχυσης (σε διανυσματική μορφή) γίνεται:
$$u^{k+1} - u^k = -D^{-1}Lu^k = Nu^k - u^k,$$
δηλαδή,
$$u^{k+1} = Nu^k,$$
η οποία είναι η εξίσωση της κοινωνικής επιρροής (του μοντέλου των DeGroot–Friedkin–Johnsen) για $S = I$ (δηλαδή, όταν όλοι οι άνθρωποι είναι πλήρως εύπλαστοι).

Το Σύνορο του Προβλήματος Κοινωνικής Επιρροής

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα κοινωνικής επιρροής πάνω στον γράφο $G = (V, E)$ των n ανθρώπων, οι οποίοι συμβολίζονται ως $i = 1, 2, \dots, n$ και ο κάθε ένας από αυτούς έχει συντελεστή επιδεκτικότητας $s_i \in [0, 1]$.
- Υποθέσεις και Συμβολισμοί:
  - Ο G είναι συνδεδεμένος γράφος.
  - $V = \Omega \cup \partial\Omega$, όπου $\Omega \cap \partial\Omega = \varnothing$.
  - $\Omega = \{i \in V : s_i > 0\}$ είναι η περιοχή κοινωνικής επιρροής αποτελούμενη από μη επίμονους ανθρώπους.
  - $\partial\Omega = \{i \in V : s_i = 0\}$ είναι το **σύνορο** της κοινωνικής επιρροής αποτελούμενο *μόνο* από επίμονους ανθρώπους.
  - $|\partial\Omega| < n$.
  - $\forall j \in \delta\Omega, \exists i \in \Omega, i \sim j$.

Πηγές Συνοριακών Διεγέρσεων Κοινωνικής Επιρροής

- Δοθέντος ενός προβλήματος κοινωνικής επιρροής σε έναν γράφο $G = (\Omega \cup \partial\Omega, E)$ ως προς ένα διάνυσμα συντελεστών επιδεκτικότητας $s = \{s_i\}_{i\in\Omega}$, λέμε ότι ο άνθρωπος $j_b \in \partial\Omega$ είναι μια **πηγή συνοριακής διέγερσης**, η απλώς μια **επίμονη πηγή**, αν ο j_b διεγείρει το παρακάτω ΠΑΣΤ της κοινωνικής επιρροής:

$$\begin{aligned}
v_i^{k+1} &= s_i N v_i^k + (1 - s_i) v_i^0, \text{ για } i \in \Omega, k = 0, 1, \ldots, \\
v_{j_b}^k &= 1, \text{ για } k = 0, 1, \ldots, \\
v_i^0 &= \varphi_i, \text{ για } i \in \Omega,
\end{aligned}$$

όπου φ_i είναι η αρχική γνώμη του $i \in \Omega$.

- Παρατηρήστε ότι, για την συνθήκη μηδενικών αρχικών τιμών $\varphi_i = 0, i \in \Omega$, το ΠΑΣΤ της κοινωνικής επιρροής γίνεται:

$$
\begin{aligned}
v_i^{k+1} &= s_i N v_i^k + (1 - s_i)\psi_i, \ \text{για } i \in \Omega, k = 1, 2, \ldots, \\
v_{j_b}^k &= 1, \ \text{για } k = 1, 2, \ldots, \\
v_i^1 &= \psi_i, \ \text{για } i \in \Omega,
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\psi_i = \begin{cases} \frac{s_i}{\deg_i}, & \text{όταν } i \sim j_b, \\ 0, & \text{όταν } i \nsim j_b. \end{cases}
$$

Χρονικώς Παροδικές Λύσεις Συνοριακών Διεγέρσεων

- Έστω $v_i^k(j_b) = v_i^k(j_b; s)$ η **χρονικώς παροδική (transient)** λύση του ΠΑΣΤ της κοινωνικής επιρροής, η οποία προκύπτει από την διέγερση μιας επίμονης πηγής j_b ως προς το διάνυσμα συντελεστών επιδεκτικότητας $s = \{s_i\}_{i \in \Omega}$.
- Τότε, για κάθε $i \in \Omega$, υπάρχει το όριο:

$$\lim_{k \to \infty} v_i^k(j_b; s) = \bar{v}_i(j_b; s).$$

Χρονικώς Μόνιμες Λύσεις Συνοριακών Διεγέρσεων

- Το όριο $\bar{v}(j_b) = \bar{v}(j_b; s) = \{\bar{v}_i(j_b; s)\}_{i\in\Omega}$ είναι η λύση της **μόνιμης κατάστασης (steady state)** του (χρονικώς στάσιμου) ΠΣΤ της κοινωνικής επιρροής στον γράφο G κάτω από την διέγερση της επίμονης πηγής j_b και ως προς συντελεστές επιδεκτικότητας (με διάνυσμα) s:

$$\bar{v}(j_b) = (I - SN)^{-1}\,(I - S)\,\psi,$$

όπου $\psi = \{\psi_i\}_{i\in\Omega}$.

- Αν, για κάθε $i \in \Omega$, $s_i = 1$, τότε

$$\lim_{k\to\infty} v_i^k(j_b; \mathbf{1}) = 1, \text{ για κάθε } i \in \Omega.$$

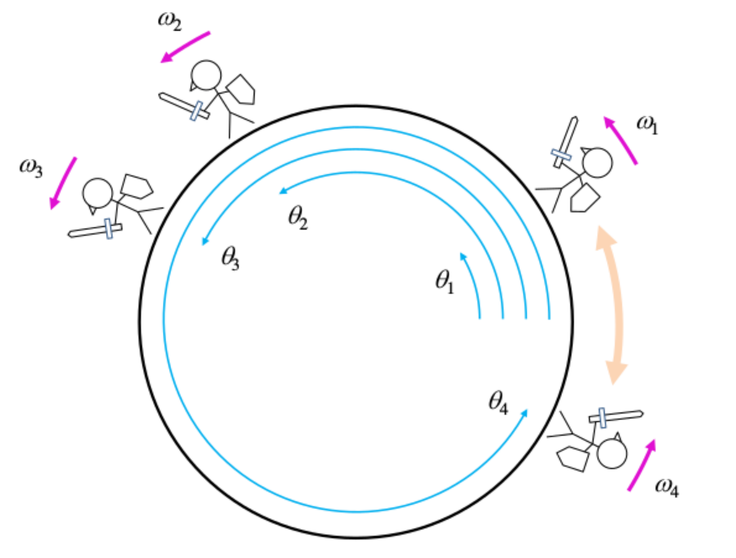
Συγχρονισμός από μια Επίμονη Πηγή Εναλλασσόμενων Συνοριακών Διεγέρσεων

- Ο άνθρωπος (κόμβος) $j_a \in \partial\Omega$ λέγεται ότι είναι μια **πηγή εναλλασσόμενης συνοριακής διέγερσης**, ή απλώς μια **εναλλασσόμενη επίμονη πηγή**, αν ο j_a διεγείρει το παρακάτω ΠΑΣΤ της κοινωνικής επιρροής:

$$
\begin{aligned}
v_i^{k+1} &= s_i N v_i^k + (1 - s_i) v_i^0, \text{ στο } \Omega, k = 0, 1, \ldots, \\
v_{j_a}^k &= 1, k = 0, 2, 4, \ldots, \\
v_{j_a}^k &= -1, k = 1, 3, 5, \ldots, \\
v_i^0 &= 0, \text{ στο } \Omega.
\end{aligned}
$$

- Παρατηρήστε ότι η γνώμη της επίμονης αυτής πηγής j_a ταλαντώνεται διαρκώς μεταξύ $+1$ και -1 χωρίς να επηρεάζεται από τους γείτονές της (μολονότι, ως πηγή, αυτή διαρκώς τους επηρεάζει αλλά σε εναλλασσόμενες κατευθύνσεις).

Συγχρονισμός στο Μοντέλο Ταλαντώσεων του Kuramoto



Το Μοντέλο του Kuramoto του Συγχρονισμού μεταξύ Συζευγμένων Ταλαντωτών πάνω σε Γράφο

- Οι n **ταλαντωτές** είναι τοποθετημένοι πάνω στους κόμβους ενός **γράφου** $G = (V, E)$. Κάθε ταλαντωτής $i \in V$ θεωρείται ότι βαδίζει πάνω σε έναν κύκλο με μια δική του γωνιακή **ταχύτητα** ω_i. Η θέση του ταλαντωτή i πάνω στον γράφο καθορίζεται από την **γωνία** θ_i.
- Επιπλέον, όμως, επειδή οι ταλαντωτές θεωρούνται **συζευγμένοι** μεταξύ τους ως προς την τοποθέτησή τους πάνω στους κόμβους του γράφου και σε σχέση με τους γείτονές τους, η γωνιακή θέση θ_i του ταλαντωτή i εξαρτάται από τις γωνιακές θέσεις των γειτονικών του ταλαντωτών σύμφωνα με τις εξής εξισώσεις του **μοντέλου του Kuramoto**:

$$\begin{aligned} \theta_i^{k+1} - \theta_i^k &= \omega_i + \alpha \frac{\sum_{j \sim i} \sin(\theta_j^k - \theta_i^k)}{\deg_i}, \text{ στο } \Omega, k = 0, 1, \ldots, \\ \theta_i^0 &= \varphi_i, \text{ στο } \Omega. \end{aligned}$$