

## Αναλυτική Γεωμετρία

Σεπτέμβριος 2014

**Θέμα 1ο** (Μον. 2,5) Να εξετασθεί αν οι παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές ή Λάθος. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας:

(1) Το σημείο  $M = (3, 8, 4)$  ανήκει στην ευθεία

$$\varepsilon : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(2) Τρία μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  του χώρου είναι συνεπίπεδα τότε και μόνο τότε όταν  $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$

(3) Το διάνυσμα  $\vec{u} = \{A, B, \Gamma\}$  είναι κάθετο στο επίπεδο  $\pi : Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ .

(4) Έστω  $\vec{u} = \vec{OA}, \vec{v} = \vec{OB}$  και  $\vec{w} = \vec{OG}$  τρία μη μηδενικά και μη συνεπίπεδα διανύσματα τέτοια ώστε το σύστημα  $O\vec{u}\vec{v}\vec{w}$  να είναι αρνητικά προσανατολισμένο. Τότε ο όγκος  $V$  του παραλληλεπίπεδου με συντρέχουσες ακμές  $OA, OB$  και  $OG$  δίνεται από τον τύπο  $V = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ .

**Θέμα 2ο** (Μον. 2) Δίνονται τα σημεία  $A = (1, 2, 3), B = (1, 2, 0)$  και  $\Gamma = (0, 0, -5)$ .

(1) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου  $\pi$  που διέρχεται από τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$ .

(2) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(3) Να βρεθεί η σχετική θέση του επιπέδου  $\pi$  (του ερωτήματος 1) με την ευθεία

$$\varepsilon : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Στην περίπτωση που τέμνονται να βρεθεί το σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon$  με το επίπεδο  $\pi$ .

**Θέμα 3ο** (Μον. 2,5) Έστω  $M_0 = (1, 2, 3)$  και

$$\varepsilon : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 10 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Να βρεθούν:

(1) Η απόσταση του σημείου  $M_0$  από την ευθεία  $\varepsilon$ .

(2) Το συμμετρικό του  $M_0$  ως προς την ευθεία  $\varepsilon$ .

**Θέμα 4ο** (Μον. 3) (1) Να εξετασθεί αν το διάνυσμα  $\vec{u} = \{8, 5, -4\}$  είναι παράλληλο της ευθείας

$$\varepsilon : \begin{cases} x - y + 3z + 5 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

(2) Να δοθεί ο ορισμός και η γεωμετρική ερμηνεία (με απόδειξη) του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων του χώρου.

(3) Έστω  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$  και  $O'\vec{e}'_1\vec{e}'_2$  ορθοκανονικά συστήματα συντεταγμένων θετικά προσανατολισμένα. Αν  $O' = (x_0, y_0)$ ,  $\vec{e}'_1 = \{a_{11}, a_{21}\}$  και  $\vec{e}'_2 = \{a_{12}, a_{22}\}$  ως προς το σύστημα  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ,  $M = (x_1, y_1)$  ως προς το σύστημα  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$  και  $M = (x'_1, y'_1)$  ως προς το σύστημα  $O'\vec{e}'_1\vec{e}'_2$ , τότε να βρεθεί η σχέση μεταξύ των  $x_1, y_1, x'_1, y'_1$ .