Λύσεις Θεμάτων στην Πραγματική Ανάλυση ΙΙΙ

Τμήμα Μαθηματικών

26 Σεπτεμβρίου 2016

Θέμα 1: Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}, & \text{αν} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της στο $(0,0)$ και εξετάστε αν η συνάρτηση είναι συνεχής και αν είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Στη συνέχεια υπολογίστε στο $(0,0)$ την παράγωγο κατά την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $a\vec{i} + b\vec{j}$, όπου $b \neq 0$.

Λύση: Οι μερικές παράγωγοι είναι $f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^2\cdot 0}{x^4+0}}{x} = 0$ και ομοίως $f_y(0,0) = 0$.

Το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ δεν υπάρχει, αφού αν προσεγγίσουμε το $(0,0)$ μέσω των παραβολών $y = kx^2$ βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2kx^2}{x^4+k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2}$, το οποίο εξαρτάται από το k, άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Επομένως δεν είναι ούτε διαφορίσιμη στο σημείο αυτό.

Η ζητούμενη παράγωγος κατά την κατεύθυνση του $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ δίνεται ως

$$D_{\vec{v}}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h^2ahb}{h^4a^4+h^2b^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2a^2b}{h^2a^4+b^2} = \frac{2a^2}{b}$$

Ο τύπος που δίνει την κατά κατεύθυνση παράγωγο ως το εσωτερικό γινόμενο του $\mathrm{grad}f$ με το $\vec{v}$ δε μπορεί να εφαρμοστεί γιατί η συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη.

Θέμα 2: Εστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε την $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $g(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Αποδείξτε ότι

$$(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 = (\frac{\partial g}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial g}{\partial \varphi})^2$$

Στη συνέχεια υπολογίστε τη $\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \varphi}$.

Λύση: Είναι

$$g_r = f_x x_r + f_y y_r = f_x \cos\varphi + f_y \sin\varphi,$$

$$g_\varphi = f_x x_\varphi + f_y y_\varphi = -f_x r\sin\varphi + f_y r\cos\varphi.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε

$$
\begin{aligned}
g_r^2 + \frac{1}{r^2} g_\varphi^2 &= f_x^2 \cos^2\varphi + f_y^2 \sin^2\varphi + 2 f_x f_y \cos\varphi \sin\varphi \\
&\quad + \frac{1}{r^2}(f_x^2 r^2 \sin^2\varphi + f_y^2 r^2 \cos^2\varphi - 2 f_x f_y r^2 \cos\varphi \sin\varphi) \\
&= f_x^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + f_y^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\
&= f_x^2 + f_y^2
\end{aligned}
$$

Για την $\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \varphi}$ βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial r}(-r\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}) \\
&= -\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + (-r\sin\varphi)\,\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial f}{\partial x}) + \\
&\quad + \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial f}{\partial y}) \\
&= -\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + (-r\sin\varphi)\,(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\sin\varphi) \\
&\quad + \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos\varphi\,(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin\varphi)
\end{aligned}
$$

Θέμα 3: Βρείτε τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της συνάρτησης $f(x,y) = xy$ πάνω στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$.

***Λύση*:** Η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στο δοσμένο κύκλο γιατί ο κύκλος είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange παίρνουμε ότι αυτές εμφανίζονται σε σημεία για τα οποία πληρούνται οι συνθήκες $\nabla f = \lambda \nabla g$, όπου $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Επομένως σε εκείνα όπου έχουμε $y = 2\lambda x$, $x = 2\lambda y$, άρα

$$4\lambda^2 y^2 + 4\lambda^2 x^2 = 4\lambda^2(x^2 + y^2) = 4\lambda^2 = 1,$$

δηλαδή $\lambda = \pm 1/2$. Απαλοίφουμε λοιπόν τα x, y (δε μπορεί κάποιο από τα δύο να είναι ίσο με 0 γιατί τότε και τα δύο θα είναι και το $(0,0)$ δεν ανήκει στον κύκλο, άρα δεν είναι κρίσιμο σημείο όπως κάποιοι από σας ισχυρίζονται) και βρίσκουμε ότι κρίσιμα σημεία είναι επομένως τα

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Σε κείναι που οι συντεταγμένες τους είναι ομόσημες, προφανώς, η συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη τιμή της $1/2$ και σε κείνα με ετερόσημες συντεταγμένες παίρνει την ελάχιστη τιμή της $-1/2$.

Θέμα 4: Ενας πλανήτης κινείται πάνω στην έλλειψη με εξίσωση $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$. Μετρώντας το χρόνο t από τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $(a,0)$, η γωνία φ που σχηματίζει ο πλανήτης με τον οριζόντιο άξονα και ο χρόνος t υπακούουν στην εξίσωση $kt = \varphi - e\cos\varphi$, όπου k, e είναι σταθερές και $0 < e < 1$. Εξηγείστε γιατί είναι δυνατό να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ συναρτήσει του χρόνου t και υπολογίστε τον. (Η εξίσωση της έλλειψης δεν παίζει ρόλο στην αιτιολόγηση αυτή και τον ακόλουθο υπολογισμό, δίνεται μόνο για την περιγραφή του προβλήματος και τον προσδιορισμό των σταθερών e, k.)

Λύση: Μας ενδιαφέρει αν μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ συναρτήσει του χρόνου t. Αυτό είναι εφικτό αν μπορεί να επιλυθεί, τοπικά, σε κάθε σημείο η εξίσωση $kt = \varphi - e\cos\varphi$, ώστε να εκφραστεί η γωνία φ συναρτήσει του χρόνου t. Σε μία τέτοια περίπτωση ο ρυθμός μεταβολής δίνεται από την παράγωγο $\frac{d\varphi}{dt}$, της επιλύουσας $\varphi(t)$, και την οποία γνωρίζουμε πώς να υπολογίζουμε. Πράγματι λοιπόν, για τη συνάρτηση

$$F(t,\varphi) = kt - \varphi + e\cos\varphi,$$

έχουμε $F(t,\varphi) = 0$ και

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -1 - e\sin\varphi,$$

Η τελευταία δε μηδενίζεται σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της F, αφού $0 < e < 1$, άρα είναι δυνατή η ζητούμενη επίλυση. Ο ρυθμός μεταβολής δίνεται, σε κάθε σημείο (t,φ), ως

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{F_t}{F_\varphi} = \frac{1}{1 + e\sin\varphi}$$

Θέμα 5: α) Βρείτε τα σημεία της επιφάνειας $x^2+2y^2+3z^2 = 1$ όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο προς το επίπεδο $3x - y + 3z = 1$.

β) Η $f\colon\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους. Θεωρούμε τα σημεία $A(1,3)$, $B(3,3)$, $C(1,7)$, $D(6,15)$ του επιπέδου. Η παράγωγος της f στο A κατά την κατεύθυνση $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ είναι 3 και κατά την κατεύθυνση $\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ είναι 26. Να βρείτε την παράγωγο της f στο A κατά την κατεύθυνση $\frac{1}{13}\overrightarrow{AD}$.

Λύση: α) Το εφαπτόμενο επίπεσο της επιφάνειας $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$ στο σημείο (x,y,z) έχει κάθετο διάνυσμα το $\nabla f = (2x, 4y, 6z)$ και πρέπει να είναι παράλληλο με το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου, δηλαδή το $(1,-1,3)$, που σημαίνει ότι για κάποιο λ είναι $2x = 3\lambda$, $4y = -\lambda$, $6z = 3\lambda$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της επιφάνειας παίρνουμε

$$\frac{9\lambda^2}{4} + \frac{2\lambda^2}{16} + \frac{3\lambda^2}{4} = 1,$$

δηλαδή $\lambda = \pm\frac{2\sqrt{2}}{5}$, και βρίσκουμε το ζητούμενο σημείο.

β) Επειδή η δοθείσα συνάρτηση είναι διαφορίσιμη έχουμε ότι η παράγωγός της κατά την κατεύθυνση $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1,0)$ είναι ίση με $\nabla f \cdot (1,0) = 1 \cdot f_x|_A + 0 \cdot f_y|_A = 3$, επομένως $f_x|_A = 3$ και, ομοίως, $f_y|_A = 26$. Προκύπτει λοιπόν ότι, για $\vec{v} = \frac{1}{13}\overrightarrow{AD}$,

$$D_{\vec{v}} f|_A = \frac{1}{13}(5 \cdot 3 + 12 \cdot 26) = \frac{327}{13}.$$