Εξέταση στην Άλγεβρα

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

19 Σεπτεμβρίου 2016

Θέμα 1: α) Δίνονται οι πρώτοι αριθμοί p, q, οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Ποιά στοιχεία περιέχει το ιδεώδες $<p> \cap <q>$ του $\mathbb{Z}$; Είναι πρώτο αυτό το ιδεώδες;

β) Δίνεται το πολυώνυμο

$$f(x) = x^5 - 6x^4 + 12x^2 - 24x + 6$$

Υπάρχει ιδεώδες I του $\mathbb{Q}[x]$ τέτοιο ώστε $1 \notin I$ και το I να περιέχει γνησίως το ιδεώδες $<f(x)>$?

Λύση: α) Τα στοιχεία του $<p> \cap <q>$ είναι τα κοινά πολλαπλάσια των p και q, δηλαδή τα πολλαπλάσια του pq (επειδή οι p και q είναι διαφορετικοί πρώτοι). Επομένως, $<p> \cap <q> = <pq>$. Το ιδεώδες αυτό δεν είναι πρώτο, διότι $pq \in <pq>$, αλλά $p \notin <pq>$ και $q \notin <pq>$.

β) Έστω ότι υπάρχει τέτοιο ιδεώδες I. Το I είναι γνήσιο ιδεώδες του $\mathbb{Q}[x]$ (διότι $1 \notin I$) το οποίο περιέχει γνησίως το $<f(x)>$. Όμως, από το κριτήριο Eisenstein για $p = 2$ (ή για $p = 3$), το $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$. Επομένως, το $<f(x)>$ είναι maximal στο $\mathbb{Q}[x]$, κάτι το οποίο αντιβαίνει στην ύπαρξη του I.

Θέμα 2: Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 6$. Θεωρείστε δεδομένο ότι ο μιγαδικός αριθμός $1+i$ είναι ρίζα αυτού του πολυωνύμου. Αναλύστε το πολυώνυμο αυτό σε γινόμενο αναγώγων παραγόντων, πρώτα στο $\mathbb{Q}[x]$ και στη συνέχεια στο $\mathbb{C}[x]$.

Λύση: Αφού το $f(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές και μιγαδική ρίζα το $1+i$, έπεται ότι το $1-i$ είναι επίσης ρίζα του $f(x)$. Επομένως, το πολυώνυμο $(x-1-i)(x-1+i) = x^2 - 2x + 2$ διαιρεί το $f(x)$. Μια απλή διαίρεση δείχνει ότι

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 3).$$

Τα πολυώνυμα $x^2 - 2x - 2$ και $x^2 - 3$ είναι ανάγωγα στο $\mathbb{Q}[x]$, λόγω του κριτηρίου Eisenstein για $p = 2$ και $p = 3$ αντίστοιχα, άρα έχουμε βρει την παραγοντοποίηση του $f(x)$ σε γινόμενο ανάγωγων παραγόντων στο $\mathbb{Q}[x]$. Αφού τα ανάγωγα πολυώνυμα του $\mathbb{C}[x]$ είναι τα πρωτοβάθμια, έπεται ότι μια παραγοντοποίηση του $f(x)$ σε γινόμενο ανάγωγων παραγόντων στο $\mathbb{C}[x]$ δίνεται από

$$f(x) = (x-1-i)(x-1+i)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}).$$

Θέμα 3: Δίνεται αντιμεταθετικός δακτύλιος (με μονάδα) A και το ιδεώδες του $I \subset A$ που έχει την ιδιότητα ότι, για κάθε $a \in I$, υπάρχει φυσικός αριθμός $n > 0$, έτσι ώστε $a^n = 0$ ($a^n = a \cdot \ldots \cdot a$, n φορές). Υποθέτουμε ότι το στοιχείο $x \in A$ είναι τέτοιο ώστε η κλάση $x + I$ (την οποία μερικές φορές συμβολίζουμε και με $[x]_I$) είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου - πηλίκο A/I. Αποδείξτε ότι το x είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του A.

Λύση: Από την υπόθεση, υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $(x+I)(y+I) = 1 + I$, δηλαδή $xy - 1 \in I$. Υπάρχει επομένως φυσικός $n > 0$ τέτοιος ώστε $(xy-1)^n = 0$. Αφού ο A είναι αντιμεταθετικός, έπεται ότι

$$x^n y^n - \binom{n}{1} x^{n-1} y^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} xy + (-1)^n = 0.$$

Επομένως,

$$x \left((-1)^{n-1} x^{n-1} y^n - (-1)^{n-1} \binom{n}{1} x^{n-2} y^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} y \right) = 1.$$

Άρα το x είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του A.

Θέμα 4: α) Βρείτε την τάξη του στοιχείου

$$(1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$$

της ομάδας μεταθέσεων S_6.

β) Πόσες κυκλικές υποομάδες έχει η $\mathbb{Z}_{2p}$, όπου p είναι περιττός πρώτος αριθμός;

Λύση: α) Το δοσμένο στοιχείο ισούται με τον 5-κύκλο $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, άρα έχει τάξη 5.

β) Κάθε υποομάδα της $\mathbb{Z}_{2p}$ είναι κυκλική, άρα αρκεί να βρούμε το πλήθος των υποομάδων της $\mathbb{Z}_{2p}$. Από γνωστό θεώρημα, αυτό ισούται με το πλήθος των διαιρετών του $2p$, που είναι οι 1, 2, p και $2p$. Επομένως η $\mathbb{Z}_{2p}$ έχει 4 κυκλικές υποομάδες.

Θέμα 5: Θεωρούμε μία ομάδα G και δύο κανονικές υποομάδες της $H \lhd G$ και $K \lhd G$. Αποδείξτε ότι η υποομάδα $H \cap K$ είναι κανονική υποομάδα της G. (Θεωρείστε γνωστό ότι είναι υποομάδα και αποδείξτε μόνο την κανονικότητα.)

Εξηγείστε γιατί η $G/(H \cap K)$ είναι ισόμορφη με μία υποομάδα της $G/H \times G/K$ χρησιμοποιώντας τον ομομορφισμό $\varphi \colon G \to G/H \times G/K$ με τύπο

$$\varphi(g) = (gH, gK)$$

Λύση: Έστω $a \in H \cap K$ και $g \in G$. Τότε $a \in H$. Αφού $H \lhd G$, έπεται ότι $gag^{-1} \in H$. Όμοια, $gag^{-1} \in K$. Άρα, $gag^{-1} \in H \cap K$. Επομένως, $H \cap K \lhd G$.

Ο πυρήνας του ομομορφισμού φ ισούται με

$$\{g \in G \colon gH = H \text{ και } gK = K\} = \{g \in G \colon g \in H \text{ και } g \in K\} = H \cap K.$$

Από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμού έπεται ότι η ομάδα $G/(H \cap K)$ είναι ισόμορφη με την εικόνα του φ, η οποία είναι μια υποομάδα της $G/H \times G/K$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ