

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

29-8-16

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

1. (α) Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Ορίστε το τριέδρο Frenet $\{T(s), N(s), B(s)\}$, την καμπυλότητα $\kappa(s)$ και τη στρέψη $\tau(s)$ της γ . Στη συνέχεια, δείξτε ότι $\dot{N}(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$. [10]

(β) Υπολογίστε την καμπυλότητα και τη στρέψη της καμπύλης

$$\gamma(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right).$$

Είναι η καμπύλη επίπεδη; [10]

2. (α) Έστω $f : M_1 \rightarrow M_2$ μια λεία απεικόνιση μεταξύ κανονικών επιφανειών. Ορίστε το διαφορικό $df_p : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ στο σημείο $p \in M_1$. [5]

(β) Έστω $M_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z > 0\}$ το τμήμα κυλίνδρου στο άνω ημιεπίπεδο και $M_2 = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2\}$ το παραβολοειδές. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : M_1 \rightarrow M_2, \quad f(x, y, z) = (x\sqrt{z}, y\sqrt{z}, z).$$

Βρείτε τις τιμές $df_p(0, 0, 1)$ και $df_p(1, 0, 0)$, όπου $p = (0, 1, 4) \in M_1$. [15]

3. Θεωρούμε τον δαχτύλιο (τόρο) $\mathbb{T}^2$ με τοπική παραμέτρηση

$$X(u, v) = ((5 + 2 \cos u) \cos v, (5 + 2 \cos u) \sin v, 2 \sin u),$$

$(u, v) \in (a, b) \times (c, d) \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Βρείτε τον πίνακα του τελεστή σχήματος σε ένα τυχαίο σημείο του $\mathbb{T}^2$ και υπολογίστε τις κύριες καμπυλότητες κ_1, κ_2 στα σημεία $A(3, 0, 0)$, $B(0, 7, 0)$ και $\Gamma(0, 5, 2)$ του $\mathbb{T}^2$.

Χαρακτηρίστε κάθε ένα από τα σημεία αυτά ως επίπεδο, παραβολικό, ελλειπτικό, ή υπερβολικό. [30]

4. Έστω $\gamma(t)$ μια κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ και έστω $v(t)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss μιας ευθιεογενούς επιφάνειας με τοπική παραμέτρηση $X(t, s) = \gamma(t) + sv(t)$ ($t, s \in \mathbb{R}$) είναι μηδέν εάν και μόνο εάν $\det(\gamma'(t), v(t), v'(t)) = 0$.¹ [30]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

¹ Λάβετε υπόψη ότι αν a, b, c είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ τότε $\langle a \times b, c \rangle = \det(a, b, c)$.