Λύσεις Θεμάτων στη Μαθηματική Λογική

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

15 Ιουνίου 2016

Θέμα 1: Εξετάστε αν είναι ισοδύναμες μεταξύ τους οι προτάσεις από τα παρακάτω ζεύγη:

$$A_3 \to (A_2 \to (A_1 \leftrightarrow (A_2 \to A_3))) \quad \text{και} \quad A_3 \to (A_2 \to A_1)$$

$$\neg A_1 \to (A_2 \to (\neg A_3 \to (A_4 \to \neg A_5))) \quad \text{και} \quad (A_2 \wedge A_4 \wedge A_5) \to (A_1 \vee A_3)$$

Λύση: Η $A_3 \to (A_2 \to (A_1 \leftrightarrow (A_2 \to A_3)))$ γίνεται ψευδής από κάποια αποτίμηση μεταβλητών v αν και μόνο αν $v(A_3) = 1$ και $v(A_2 \to (A_1 \leftrightarrow (A_2 \to A_3))) = 0$, αν και μόνο αν $v(A_3) = 1$, $v(A_2) = 1$ και $v(A_1 \leftrightarrow (A_2 \to A_3)) = 0$. Το τελευταίο, δεδομένου ότι $v(A_2 \to A_3) = 1$, είναι ισοδύναμο με $v(A_1) = 0$. Με άλλα λόγια Η $A_3 \to (A_2 \to (A_1 \leftrightarrow (A_2 \to A_3)))$ γίνεται ψευδής από κάποια αποτίμηση μεταβλητών v αν και μόνο αν $v(A_3) = 1$, $v(A_2) = 1$ και $v(A_1) = 0$. Ομοίως, μια αποτίμηση μεταβλητών v κάνει ψευδή την $A_3 \to (A_2 \to A_1)$ αν και μόνο αν $v(A_3) = 1$ και $v(A_2 \to A_1) = 0$, αν και μόνο αν $v(A_3) = 1$, $v(A_2) = 1$ και $v(A_1) = 0$. Άρα οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες, αφού διαψεύδονται από τις ίδιες ακριβώς απονομές αληθοτιμών.

Για το δεύτερο ζευγάρι προτάσεων έχουμε

$$\begin{aligned}
\neg A_1 \to (A_2 \to (\neg A_3 \to (A_4 \to \neg A_5))) &\equiv \neg\neg A_1 \vee (A_2 \to (\neg A_3 \to (A_4 \to \neg A_5))) \\
&\equiv A_1 \vee (\neg A_2 \vee (\neg A_3 \to (A_4 \to \neg A_5))) \\
&\equiv A_1 \vee (\neg A_2 \vee (\neg\neg A_3 \vee (A_4 \to \neg A_5))) \\
&\equiv A_1 \vee (\neg A_2 \vee (A_3 \vee (\neg A_4 \vee \neg A_5))) \\
&\equiv \neg A_2 \vee \neg A_4 \vee \neg A_5 \vee A_1 \vee A_3 \\
&\equiv \neg(A_2 \wedge A_4 \wedge A_5) \vee A_1 \vee A_3 \\
&\equiv (A_2 \wedge A_4 \wedge A_5) \to (A_1 \vee A_3).
\end{aligned}$$

Θέμα 2: Βρείτε ποιές είναι οι απονομές αληθοτιμών στις προτασιακές μεταβλητές που καθιστούν αληθή την πρόταση

$$(A_1 \to \neg A_2) \wedge (A_1 \to \neg A_3) \wedge \ldots \wedge (A_1 \to \neg A_n) \wedge (A_2 \to \neg A_3) \wedge \ldots \wedge (A_2 \to \neg A_n) \wedge \ldots \wedge (A_{n-1} \to \neg A_n)$$

Τι κανονική διαζευκτική μορφή μπορεί να έχει μία τέτοια πρόταση;

β) Γράψτε μία πρόταση $\varphi(A_1, A_2, A_3, A_4)$, που περιέχει τέσσερεις προτασιακές μεταβλητές (τις A_1, A_2, A_3, A_4), με την ιδιότητα ότι, για κάθε απονομή αληθοτιμών v στις προτασιακές μεταβλητές

$$v(\varphi) = 1 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad v(A_1) + v(A_2) + v(A_3) + v(A_4) \geq 3$$

Λύση: α) Μια αποτίμηση μεταβλητών v κάνει αληθή την πρόταση αν και μόνο αν κάνει αληθείς όλες τις προτάσεις $A_i \to \neg A_j$, όπου $i < j$, που μετέχουν στη σύζευξη. Αν λοιπόν έχουμε $v(A_j) = 0$, για κάθε j με $1 \leq j \leq n$, η v κάνει την πρόταση αληθή. Αν έχουμε $v(A_j) = 1$ για ένα μόνο j με $1 \leq j \leq n$, η v δίνει πάλι $v(A_i \to \neg A_j) = 1$ όταν $i < j$, επομένως πάλι κάνει την πρόταση αληθή. Αν όμως έχουμε $v(A_i) = 1$ και $v(A_j) = 1$ για i j με $i \neq j$, τότε έχουμε ότι $v(A_i \to \neg A_j) = 0$. Επομένως οι μόνες αποτιμήσεις μεταβλητών που κάνουν αληθή τη δοθείσα πρόταση είναι εκείνες που είτε δίνουν αληθοτιμή 0 σε όλες τις εμπλεκόμενες προτασιακές μεταβλητές, ή εκείνες που δίνουν σε μία εξ αυτών αληθοτιμή 1 και σε όλες τις υπόλοιπες αληθοτιμή 0. Ως εκ τούτου η κανονική διαζευκτική μορφή της δοθείσας πρότασης είναι

$$(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge ... \wedge \neg A_n) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge ... \wedge \neg A_n) \vee ... \vee (\neg A_1 \wedge ... \wedge \neg A_{n-1} \wedge A_n)$$

β) Ζητάμε μια πρόταση που αληθεύει όταν τουλάχιστον τρεις από τις τέσσερεις προτασιακές μεταβλητές που περιέχει αληθεύουν, επομένως μια τέτοια είναι η

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4) \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3 \wedge A_4) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3 \wedge A_4) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \neg A_4)$$

Θέμα 3: Δίνονται οι προτάσεις

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \to R(x,y))) \quad \text{και} \quad \exists x \forall y(R(y,x) \wedge \exists z(R(x,z) \to x = z))$$

α) Ερμηνεύουμε τις προτάσεις σε μία δομή που έχει ως φορέα το σύνολο των φυσικών αριθμών και όπου το σύμβολο $P(x)$ ερμηνεύεται ως ''άρτιος ο x'' και το σύμβολο $R(x,y)$ ερμηνεύεται ως '' ο x διαιρεί τον y''. Εξηγείστε γιατί οι προτάσεις καθίστανται αληθείς σε αυτήν την ερμηνεία. Διατυπώστε σε αυτήν τη συμβολική γλώσσα (χωρίς να χρησιμοποιήσετε άλλα μη-λογικά σύμβολα) τη φράση '' δύο άρτιοι αριθμοί έχουν έναν κοινό διαιρέτη''

β) Γράψτε πρόταση λογικά ισοδύναμη με τη δεύτερη από τις παραπάνω που να είναι κανονική ποσοδεικτική μορφή, δηλαδή να προηγείται μια ακολουθία ποσοδεικτών και να ακολουθεί ένα μέρος που δεν έχει καθόλου πσοδείκτες.

Λύση: α) Η πρώτη πρόταση αληθεύει στη συγκεκριμένη ερμηνεία αν υπάρχει φυσικός αριθμός που είναι άρτιος και διαιρεί κάθε άλλον άρτιο φυσικό αριθμό. Προφανώς ο αριθμός 2 έχει αυτήν την ιδιότητα.

Η δεύτερη πρόταση αληθεύει σε αυτήν την ερμηνεία αν υπάρχει φυσικός αριθμός που διαιρείται από οποιονδήποτε άλλο και υπάρχει φυσικός αριθμός που, αν διαιρείται από οποιονδήποτε άλλο, τότε ισούται με τον πρώτο. Προφανώς ο αριθμός 0 έχει την ιδιότητα ότι διαιρείται από οποιονδήποτε φυσικό αριθμό, άρα αποτελεί το ''τεκμήριο'' ύπαρξης και στις δύο περιπτώσεις όπου αυτό απαιτείται.

Η ζητούμενη πρόταση σε συμβολική γλώσσα είναι η

$$\forall x \forall y \ (\ (P(x) \wedge P(y)) \ \to \ \exists z(R(z,x) \wedge R(z,y))\ )$$

β) Στην πρόταση $\exists x \forall y(R(y,x) \wedge \exists z(R(x,z) \to x = z))$ αρκεί να περάσουμε τον ποσοδείκτη $\exists z$ έξω από τη σύζευξη. Αυτό επιτρέπεται να το κάνουμε, αφού

$$\varphi \wedge \exists z \psi(z) \ \equiv \ \exists z(\varphi \wedge \psi(z))$$

όταν η μεταβλητή z δεν εμφανίζεται ελεύθερα στον τύπο φ, όπως συμβαίνει σ' αυτήν την περίπτωση. Επομένως

$$\exists x \forall y(R(y,x) \wedge \exists z(R(x,z) \to x = z)) \ \equiv \ \exists x \forall y \exists z(R(y,x) \wedge (R(x,z) \to x = z))$$

Θέμα 4: Θεωρώντας γνωστές οποιεσδήποτε τυπικές αποδείξεις έχουμε κάνει στα πλαίσια του μαθήματος και το Θεώρημα Απαγωγής (αλλά χωρίς να καταφύγετε στο Θεώρημα Πληρότητας και να ανάγετε το πρόβλημα σε σημασιολογικές έννοιες) δώστε τις παρακάτω τυπικές αποδείξεις:

(i) $(\neg\varphi \to \psi) \to \chi \ \vdash \ \psi \to \chi$

(ii) $(\neg\varphi \to \psi) \to \chi \ \vdash \ \varphi \to \chi$

Λύση: (i) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Απαγωγής δείχνουμε, ισοδύναμα, ότι

$$\{(\neg\varphi \to \psi) \to \chi, \psi\} \vdash \chi$$

$$\begin{array}{rl} \text{ΑΣ 1} & \psi \to (\neg\varphi \to \psi) \\ \text{υπόθεση} & \psi \\ \text{MP} & \neg\varphi \to \psi \\ \text{υπόθεση} & (\neg\varphi \to \psi) \to \chi \\ \text{MP} & \chi \end{array}$$

(i) Ομοίως δείχνουμε, ισοδύναμα, ότι

$$\{(\neg\varphi \to \psi) \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$$

Θυμίζουμε ότι υπάρχει απόδειξη $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ (δείτε την απόδειξη της Πρόατασης 1.1 του φυλλαδίου σχετικά με την τυπική απόδειξη). Επομένως υπάρχει τυπική απόδειξη $\varphi \vdash \neg\varphi \to \psi$

$$\begin{array}{rl} \text{υπόθεση} & \varphi \\ & ... \\ & \neg\varphi \to \psi \\ \text{υπόθεση} & (\neg\varphi \to \psi) \to \chi \\ \text{MP} & \chi \end{array}$$

Θέμα 5: Θυμίζουμε ότι ένα διατεταγμένο σύνολο λέγεται καλώς - διατεταγμένο όταν κάθε μη κενό υποσύνολό του έχει ελάχιστο στοιχείο. Σε αναλογία με τα παραδείγματα που δώσαμε στο μάθημα, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει θεωρία της Κατηγορηματικής Λογικής, τα μοντέλα της οποίας να είναι όλα τα καλώς - διατεταγμένα σύνολα. Δηλαδή, θεωρείστε ένα αριθμήσιμο σύνολο συμβόλων σταθερών $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ και τις προτάσεις $c_2 < c_1$, $c_3 < c_2, ...,$ $c_{n+1} < c_n, ...$ και υποθέστε πως υπάρχει ένα σύνολο προτάσεων τα μοντέλα του οποίου είναι...

Λύση: Εστω λοιπόν ότι υπάρχει ένα σύνολο προτάσεων Σ, τα μοντέλα του οποίου είναι τα καλώς - διατεταγμένα σύνολα. Εισάγουμε ένα αριθμήσιμο σύνολο συμβόλων σταθερών $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ και θεωρούμε τις προτάσεις $c_2 < c_1$, $c_3 < c_2, ...,$ $c_{n+1} < c_n, ...$

Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του

$$\Sigma^* = \Sigma \cup \{c_2 < c_1,\ c_3 < c_2, ...,\ c_{n+1} < c_n, ...\}$$

περιλαμβάνει μόνο πεπερασμένο πλήθος από τα νέα σύμβολα σταθερών, ας πούμε τις $c_1,\ ...\ c_m$, και μόνο πεπερασμένο πλήθος από τις παραπάνω προτάσεις που εμπλέκουν αυτά τα σύμβολα σταθερών. Επομένως σε κάθε καλώς διατεταγμένο σύνολο με τουλάχιστον m στοιχεία (για παράδειγμα ένα αρχικό τμήμα των φυσικών αριθμών) μπορούμε να ερμηνεύσουμε αυτά τα σύμβολα σταθερών ώστε οι πεπερασμένου πλήθους αυτές προτάσεις να αληθεύουν. Αρα κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ^* επαληθεύεται σε μία τέτοια δομή. Από το Θεώρημα του Συμπαγούς ολόκληρο το σύνολο Σ^* επαληθεύεται σε κάποια δομή. Μια τέτοια δομή λοιπόν, αφού θα επαληθεύει τις προτάσεις του Σ, θα είναι καλώς - διατεταγμένο σύνολο. Από την άλλη πλευρά το υποσύνολό του $\{c_1, c_2, ..., c_n, ...\}$ προφανώς δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Αυτό είναι άτοπο.