Λύσεις Θεμάτων Αλγεβρας

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

7 Ιουνίου 2016

Θέμα 1: α) Δίνεται το πολυώνυμο

$$f(x) = x^8 + 35x^6 - 625x^5 + 25x + 315 \in \mathbb{Q}[x]$$

Αποδείξτε ότι ο δακτύλιος - πηλίκο $\mathbb{Q}[x]/ < f(x) >$ είναι σώμα.

β) Βρείτε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των πολυωνύμων $2x^3 - 16$ και $x^4 - x^3 + x - 10$ στο $\mathbb{Q}[x]$.

Λύση: α) Επειδή ο πρώτος αριθμός 5 διαιρεί τους συντελεστές των μη μεγιστοβάθμιων όρων αλλά ο 5^2 δε διαιρεί το $315 = 63.5$, εφαρμόζεται το κριτήριο του Eisenstein, το οποίο μας δίνει ότι το $f(x)$ είναι ανάγωγο στο δακτύλιο των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές. Από το Λήμμα του Gauss προκύπτει ότι είναι ανάγωγο και στο δακτύλιο των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές. Επομένως το ιδεώδες που παράγει (εντός του πολυωνυμικού δακτυλίου με συντελεστές σ' ένα σώμα) είναι μεγιστικό. Αρα ο δακτύλιος - πηλίκο είναι σώμα.

β) Προφανώς το πρώτο από τα δύο πολυώνυμα αναλύεται ως $2x^3 - 16 = 2(x-2)(x^2+2x+4)$ και ο παράγοντας x^2+2x+4 είναι ανάγωγος. Από την άλλη πλευρά το x^4-x^3+x-10 έχει ρίζα το 2, άρα έχει ως παράγοντα το $x-2$. Εκτελώντας τη διαίρεση βρίσκουμε ότι $x^4-x^3+x-10 = (x-2)(x^3+x^2+2x+5)$. Το $x^3 + x^2 + 2x + 5$ δε διαιρείται ακριβώς με το $x^2 + 2x + 4$ (γιατί τότε το $x^2 + 2x + 4$ θα έπρεπε να διαιρεί ακριβώς τη διαφορά τους, δηλαδή το $x^3 + 1$, πράγμα που προφανώς δε συμβαίνει). Επομένως ο μόνος κοινός παράγοντας που έχουν τα δύο πολυώνυμα και είναι και μονικό πολυώνυμο, είναι το $x - 2$, δηλαδή αυτός είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους.

Θέμα 2: α) Εστω R αντιμεταθετικός, μοναδιαίος δακτύλιος, A ακέραια περιοχή και $\varphi\colon R \to A$ ομομορφισμός δακτυλίων. (Θεωρούμε ότι $\varphi(1_R) = 1_A$.) Αποδείξτε ότι ο πυρήνας $\ker\varphi$ είναι πρώτο ιδεώδες του R.

β) Εστω A ακέραια περιοχή. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μη σταθερό πολυώνυμο $f(x)$ με συντελεστές στον A, ώστε για κάθε $a \in A$, ισχύει ότι $f(a) = 0$. Εξηγείστε γιατί η A είναι σώμα.

Λύση: α) Η εικόνα του ομομορφισμού είναι, κατά τα γνωστά, ένας υποδακτύλιος της A, ο οποίος είναι ισόμορφος με $R/\ker\varphi$. Γνωρίζουμε επίσης ότι ο πυρήνας του ομομορφισμού θα είναι πρώτο ιδεώδες αν και μόνο αν ο δακτύλιος - πηλίκο $R/\ker\varphi$ είναι ακέραια περιοχή. Ισοδύναμα, αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν ο ισόμορφός του δακτύλιος, $\mathrm{Im}\varphi$, είναι ακέραια περιοχή. Ομως, ως υποδακτύλιος της ακέραιας περιοχής A θα είναι κι αυτός ακέραια περιοχή: Αν $xy = 0 \in \mathrm{Im}\varphi$, αυτό σημαίνει ότι $xy = 0 \in A$. Αρα $x = 0$ ή $y = 0$.

β) Εχουμε πως υπάρχει ένα πολυώνυμο με συντελεστές στην A ώστε όλα τα στοιχεία της A να είναι ρίζες του. Ομως το πλήθος των ριζών του πολυωνύμου είναι πεπερασμένο. Επομένως η A είναι μία πεπερασμένη ακέραια περιοχή, οπότε γνωρίζουμε ότι είναι σώμα.

Θέμα 3: Δίνεται η παρακάτω μετάθεση $\sigma \in S_{11}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 11 & 7 & 2 & 10 & 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Αναλύστε τη σ σε γινόμενο ξένων μεταξύ τους κύκλων, βρείτε την τάξη της και εξετάστε αν είναι άρτια ή περιττή. Τι τάξη έχει το στοιχείο $\sigma^{10} \in S_{11}$;

Λύση: Παρατηρούμε κατ' αρχάς την ύπαρξη ενός κύκλου $\tau_1 = (2\ 4\ 6\ 7)$. Σχηματίζοντας το γινόμενο $\tau_1^{-1}\sigma$, παρατηρούμε εκεί την ύαρξη του κύκλου $\tau_2 = (3\ 5\ 11\ 9\ 8\ 10)$. Σχηματίζοντας το γινόμενο $\tau_2^{-1}\tau_1^{-1}\sigma$ παρατηρούμε ότι είναι η ταυτοτική μετάθεση, άρα $\sigma = \tau_1\tau_2$. Ο κύκλος τ_1 είναι μήκους 4, άρα ως στοιχείο της S_{11} έχει τάξη 4 ενώ για τον ίδιο λόγο ο τ_2 έχει τάξη 6. Επομένως η σ, ως γινόμενο των δύο, θα έχει τάξη ίση με $\varepsilon\kappa\pi(4,6) = 12$. Οι δύο μεταθέσεις τ_1, τ_2, ως κύκλοι αρτίου μήκους είναι περιττές μεταθέσεις, άρα το γινόμενό τους είναι άρτια μετάθεση. Αφού η σ έχει τάξη 12, το σ^{10} θα έχει τάξη $\frac{12}{\mu\kappa\delta(10,12)} = \frac{12}{2} = 6$.

Θέμα 4: Δίνονται δύο στοιχεία a, b μίας ομάδας G με τάξεις, αντίστοιχα, m και n, με $\mu\kappa\delta(m,n) = 1$.

Αποδείξτε ότι για την τομή των υποομάδων που παράγει το καθένα απ' αυτά τα στοιχεία ισχύει $< a > \cap < b >= \{1\}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι οι υποομάδες $< a >$, $< b >$ που παράγουν τα στοιχεία αυτά είναι κανονικές εντός της G. Αποδείξτε ότι $a^3b^2a^{-3}b^{-2} = 1$.

Λύση: Η υποομάδα $< a > \cap < b >$ της G είναι υποομάδα τόσο της $< a >$, όσο και της $< b >$. Επομένως η τάξη της $< a > \cap < b >$, από το Θεώρημα Lagrange, θα διαιρεί τόσο το m όσο και το n. Αρα θα διαιρεί και το $\mu\kappa\delta(m,n) = 1$, πράγμα που σημαίνει ότι έχει μόνο ένα στοιχείο, το ουδέτερο.

Θέτοντας $x = b^2$, η κανονικότητα της υποομάδας $< a >$ δίνει ότι το στοιχείο $xa^{-3}x^{-1} = b^2a^{-3}b^{-2}$ ανήκει στην $< a >$, άρα και το $a^3b^2a^{-3}b^{-2}$ ανήκει στην $< a >$. Ομοίως, θέτοντας $y = a^3$, παίρνουμε ότι το $yb^2y^{-1} = a^3b^2a^{-3}$ ανήκει στην $< b >$. Επομένως και το $a^3b^2a^{-3}b^{-2}$ ανήκει στην $< b >$. Συμπεραίνουμε ότι το $a^3b^2a^{-3}b^{-2}$ ανήκει στην τομή $< a > \cap < b >$, άρα είναι το ουδέτερο στοιχείο της G.

Θέμα 5: Θεωρούμε δύο μη ισόμορφα μεταξύ τους σώματα K_1, K_2, έναν αντιμεταθετικό μοναδιαίο δακτύλιο A και δύο ομομορφισμούς δακτυλίων $f_1\colon A \to K_1$, $f_2\colon A \to K_2$, οι οποίοι είναι επί. Αποδείξτε ότι ο επαγόμενος ομομορφισμός $f\colon A \to K_1 \times K_2$, με τύπο $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$, είναι επί. Εξακολουθεί να ισχύει το συμπέρασμα όταν τα K_1, K_2 είναι ισόμορφα;

Λύση: Αφού οι f_1, f_2 είναι επί έχουμε ότι $\mathrm{Im}f_1 = K_1$, $\mathrm{Im}f_2 = K_2$ και το πρώτο θεώρημα ισομορφισμού δίνει ότι $A/\ker f_1 \cong K_1$, $A/\ker f_2 \cong K_2$. Αρα τα ιδεώδη $\ker f_1$, $\ker f_2$ είναι μεγιστικά. Αφού τα σώματα K_1, K_2 δεν είναι ισόμορφα μεταξύ τους, τα ιδεώδη $\ker f_1$, $\ker f_2$ είναι διάφορα μεταξύ τους. Αρα το άθροισμα $\ker f_1 + \ker f_2$, εφόσον περιέχει γνησίως κάποια μεγιστικά ιδεώδη ως υποσύνολα, δε μπορεί να είναι τίποτε άλλο από ολόκληρο το δακτύλιο A. Εφαρμόζεται επομένως το Κινέζικο θεώρημα, το οποίο μας δίνει ότι ο ομομορφισμός f είναι επί.

Ως ακραία περίπτωση ισομορφισμού ας πάρουμε ότι $K_1 = K_2 = K$ και ας θεωρήσουμε το ''διαγώνιο'' ισομορφισμό $f(a) = (a,a)$ που επάγεται από τους ταυτοτικούς ομομορφισμούς $id_K\colon K \to K$. Προφανώς οι ταυτοτικοί ομομορφισμοί είναι επί ενώ ο f δεν είναι.