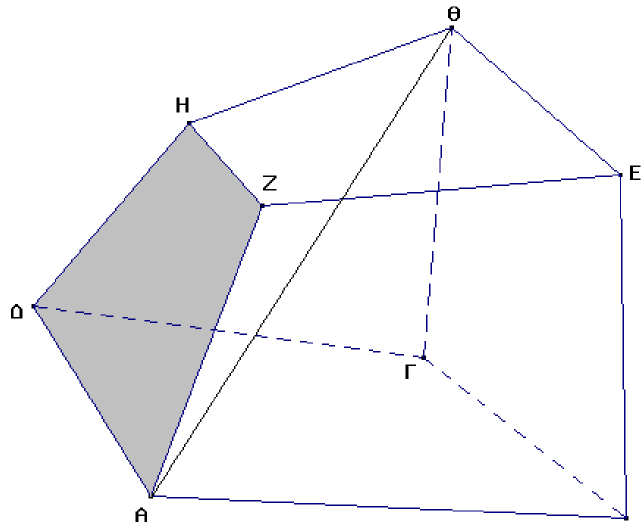
Το Πολύεδρο

Ονομάζουμε **Πολύεδρο** ένα στερεό το οποίο περικλείεται από επίπεδα. Τα επίπεδα που περιορίζουν τον χώρο που καταλαμβάνει το στερεό λέγονται **Έδρες του πολυέδρου**. Οι ευθείες που ορίζονται ως τομές δύο εδρών του πολυέδρου λέγονται **Ακμές του πολυέδρου**. Συχνά ονομάζουμε *έδρες* και τα *πολύγωνα* που σχηματίζονται επί μιάς έδρας μέσω των ευθειών-τομών της με τις άλλες. Οι δίεδρες γωνίες που σχηματίζονται στις ακμές του πολυέδρου λέγονται **Δίεδρες του πολυέδρου**. Οι πολυεδρικές γωνίες που σχηματίζονται από τρεις ή περισσότερες έδρες που διέρχονται από κοινό σημείο λέγονται **Πολυεδρικές γωνίες του πολυέδρου**. Οι κορυφές των πολυεδρικών γωνιών λέγονται **Κορυφές του πολυέδρου**. Ένα πολύεδρο λέγεται **Κυρτό** όταν κάθε έδρα του αφήνει το πολύεδρο από την μιά μεριά του μόνο. Δύο πολύεδρα ΑΒΓ... και Α*Β*Γ*... λέγονται **Ίσα** όταν έχουν αντίστοιχες έδρες ίσες και αντίστοιχες δίεδρες επίσης ίσες.



Έδρες: ΑΖΗΔ, ΖΗΘΕ, ΕΘΓΒ, ΔΓΘΗ, ΑΒΓΔ

Κορυφές: Α, Β, Γ, Δ, Ε,Ζ Η, Θ

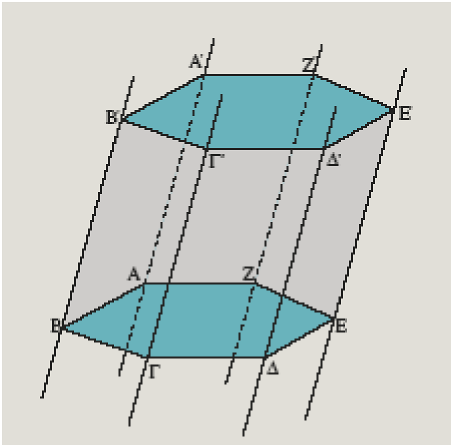
Διαγώνιος: ΑΘ

Ακμές: ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ, ...

Η Πρισματική επιφάνεια - Πρίσμα

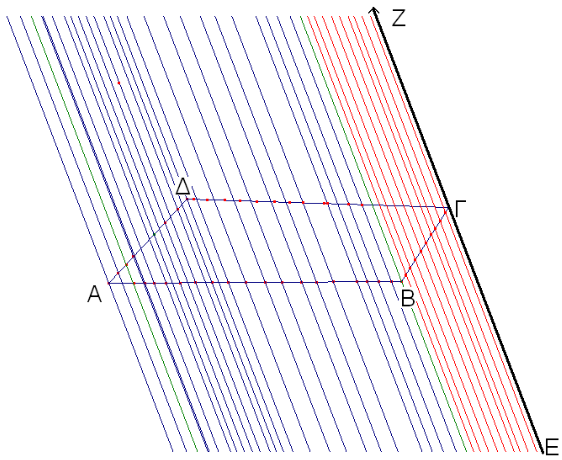
1ος Ορισμός

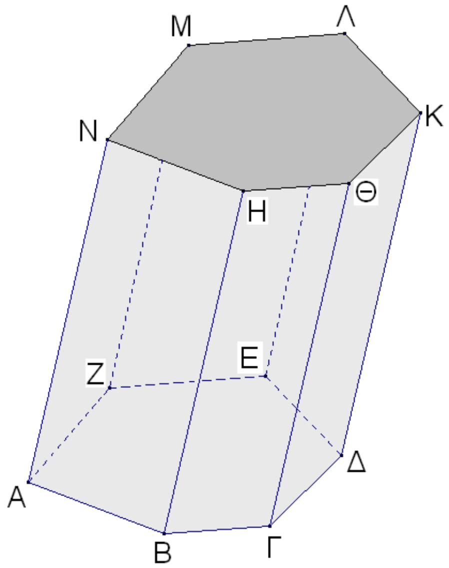
Η εκτεινόμενη στο άπειρο επιφάνεια, αποτελούμενη από τις λωρίδες μεταξύ των παραλλήλων ευθειών (ΑΑ′,ΒΒ′), (ΒΒ′,ΓΓ′), ... λέγεται **Πρισματική επιφάνεια**. Οι δίεδρες γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ δύο διαδοχικών λωρίδων ονομάζονται **Δίεδρες** της πρισματικής επιφάνειας. Το στερεό που προκύπτει τέμνοντας μία πρισματική επιφάνεια με δύο παράλληλα επίπεδα λέγεται **Πρίσμα**. Η απόσταση αυτών των επιπέδων λέγεται **Ύψος του πρίσματος**. Τα πολύγωνα που ΑΒΓΔ... και Α′Β′Γ′Δ′... που ορίζονται από την τομή της πρισματικής επιφάνειας με τα παράλληλα επίπεδα είναι ίσα (Πόρισμα 7.3.2) και λέγονται **Βάσεις του πρίσματος**. Το πρίσμα λέγεται **Κυρτό** όταν το αντίστοιχο πολύγωνο της βάσης ΑΒΓΔ... είναι κυρτό. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ... λέγονται **Παράπλευρες ακμές**



2ος Ορισμός

Δίδεται μια Η κλειστή κυρτή πολυγωνική γραμμή, η ΑΒΓΔ, και μια ευθεία οδηγός, η ΕΖ (ή μια διεύθυνση η ΕΖ). Αν από κάθε σημείο της πολυγωνικής γραμμής αχθούν ευθείες παράλληλες προς την ΕΖ, η επιφάνεια που δημιουργείται ονομάζεται **πρισματική επιφάνεια.**





Ονομάζεται **πρίσμα** το στερεό που περικλείεται από μια πρισματική επιφάνεια και δύο παράλληλα επίπεδα τα οποία τέμνουν την πρισματική αυτή επιφάνεια.

Τα τμήματα των παράλληλων επιπέδων που αποκόπτονται από τα παράλληλα επίπεδα αποτελούν τις **βάσεις του πρίσματος**. Εδώ τα ΑΒΓΔΕΖ και ΝΗΘΚΛΜ.

Το τμήμα της πρισματικής επιφάνειας που περιέχεται μεταξύ των παράλληλων επιπέδων λέγεται **παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος.**

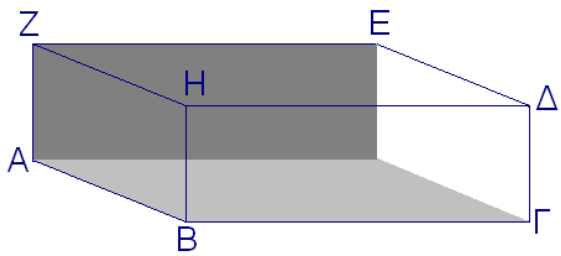
Θεώρημα: Οι βάσεις ενός πρίσματος είναι ίσα (και όμοια) πολύγωνα.

Τα παραλληλόγραμμα που αποτελούν τη παράπλευρη επιφάνεια ενός πρίσματος λέγονται **έδρες του πρίσματος**.

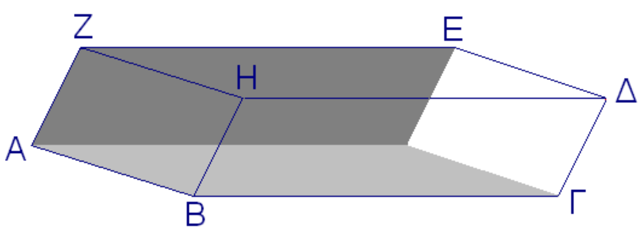
Παραλληλεπίπεδα

(Ή μια κατηγορία Πρισμάτων)

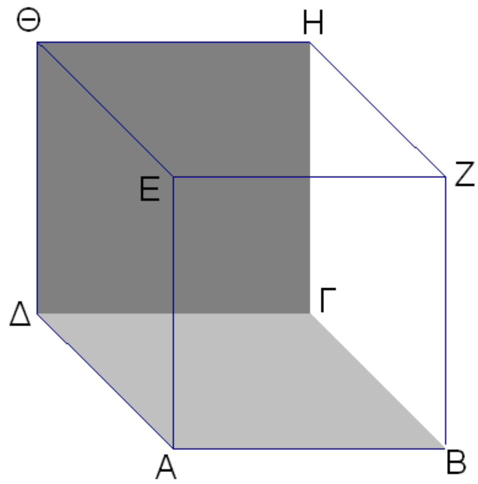
Ορθογώνιο



Πλάγιο

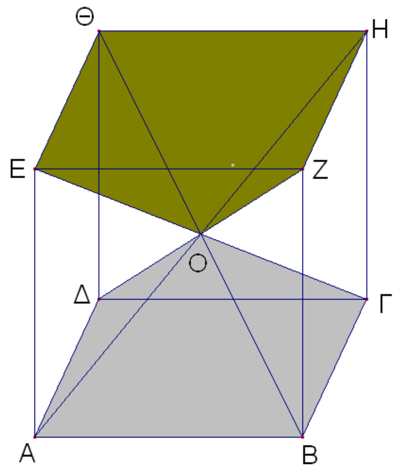


Ο κύβος



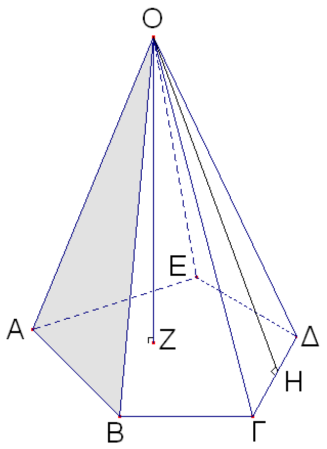
Οι διαγώνιοι του κύβου χωρίζουν τον κύβο σε έξη ίσες μεταξύ τους πυραμίδες τις

Ο,ΑΒΓΔ Ο,ΒΓΗΖ Ο,ΕΖΗΘ Ο,ΑΔΘΕ Ο,ΑΒΖΕ και Ο,ΓΗΘΔ.



Η Πυραμίδα

Δοθέντος πολυγώνου ΑΒΓΔ... περιεχομένου σε επίπεδο ε και σημείου Ο εκτός του επιπέδου αυτού, ονομάζουμε **Πυραμίδα** το στερεό σχήμα που δημιουργείται ενώνοντας το σημείο Ο με τις κορυφές του πολυγώνου. Οι πλευρές του πολυγώνου καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ... λέγονται **Ακμές της πυραμίδας**. Οι ακμές ΟΑ, ΟΒ, ... λέγονται συχνά και **Παράπλευρες ακμές** της πυραμίδας. Το πολύγωνο, λέγεται **Βάση της πυραμίδας**. Όταν το πολύγωνο είναι κυρτό η πυραμίδα λέγεται **Κυρτή πυραμίδα**. Συχνά με τον όρο *βάση πυραμίδας* εννοούμε και το επίπεδο ε που περιέχει το πολύγωνο. Στα



Η βάση της πυραμίδας το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ

Η κορυφή της Πυραμίδας το σημείο Ο

Το ύψος της πυραμίδας το ΟΖ

Παράπλευρες έδρες: ΟΑΒ, ΟΒΓ,ΟΓΔ,ΟΕΔ,ΟΕΑ

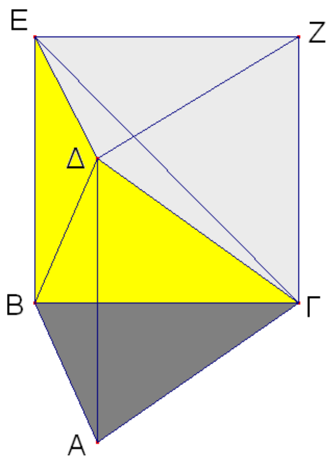
Παράπλευρο ύψος της έδρας ΓΟΔ: ΟΗ

Θα συμβολίζουμε μια πυραμίδα γράφοντας πρώτα το γράμμα της κορυφής το οποίο θα χωρίζεται με ένα κόμμα από τα γράμματα του πολυπλεύρου της βάσης.

Έτσι η διπλανή πυραμίδα είναι η Ο,ΑΒΓΔΕ

Ο όγκος της Πυραμίδας

Ο όγκος μιας πυραμίδας ως φυσικό μέγεθος πρέπει να είναι γινόμενο (μήκος)^3, να έχει διαστάσεις L^3, να είναι επιφάνεια επί μήκος επί κάποια συντελεστή, καθαρό αριθμό. Δηλαδή να είναι της μορφής $V_\pi = \frac{1}{3}B\upsilon$



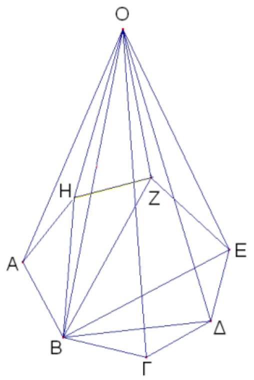
Θεώρημα: Ο όγκος μιας τριγωνικής πυραμίδας είναι το ένα τρίτο του πρίσματος που έχει την ίδια βάση, *Β* και το ίδιο ύψος, *υ*.

Έστω μια τριγωνική πυραμίδα η Δ,ΑΒΓ. Από τη κορυφή Δ φέρνουμε την ΔΖ=//ΑΓ και ΔΕ=//ΑΒ και κατόπιν τα ΓΖ ΒΕ και ΕΖ. Προφανώς το στερεό ΑΒΓΔΕΖ είναι ένα τριγωνικό πρίσμα, που αποτελείται από την αρχική πυραμίδα Δ,ΑΒΓ και την Δ,ΒΓΖΕ. Φέρνουμε τώρα τη διαγώνιο ΕΓ της πλευράς ΒΓΖΕ του πρίσματος η οποία από την κατασκευή είναι παραλληλόγραμμο. Δημιουργούνται τότε δύο ακόμη πυραμίδες η Δ,ΕΓΖ και η Δ,ΕΓΒ οι οποίες είναι ίσες μεταξύ τους καθότι έχουν ίσες βάσεις πάνω στο ίδιο επίπεδο(ΕΓΖ)=(ΕΓΒ) και κοινή κορφή δηλαδή ίσα ύψη. Επίσης η Δ,ΕΓΖ μπορεί να θεωρηθεί με κορυφή το Γ ως Γ,ΔΕΖ και ως τέτοια έχει ίση τη βάση της και το ύψος της με την αρχική τη Δ,ΑΒΓ. Άρα (Δ,ΑΒΓ)=(Δ,ΕΓΖ)=(Δ,ΕΓΒ). ¨Όμως

(Δ,ΑΒΓ)+(Δ,ΕΓΖ)+(Δ,ΕΓΒ)=(ΑΒΓΔΕΖ). Με άλλα λόγια (Δ,ΑΒΓ)= $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓΔΕΖ) ή

$$V_\pi = \frac{1}{3} B\upsilon$$

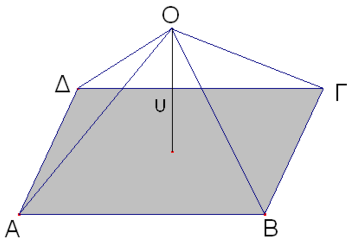
Σχόλιο: Η παραπάνω απόδειξη είναι η κλασική Ευκλείδεια απόδειξη, Όπως όμως μαθαίνουμε από τον Αρχιμήδη το αποτέλεσμα αυτό ήταν γνωστό στον Δημόκριτο, αλλά η απόδειξη, μέσα στο αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Εύδοξο τον Κνίδειο,



Ο τύπος αυτό γενικεύεται εύκολα ως εξής:

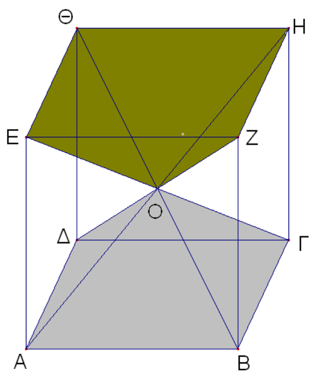
Θεώρημα: Κάθε πυραμίδα είναι ίση σε όγκο με το ένα τρίτο του πρίσματος που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

(Υπόδ. Κάθε πυραμίδα χωρίζεται σε τριγωνικές…)



Σχόλιο: Ο συντελεστής $\frac{1}{3}$ μπορεί να προσδιοριστεί και ως εξής:

Έστω μια τετραγωνική κανονική πυραμίδα με πλευρά βάσης α. Τότε ο όγκος της θα είναι $V_\pi = \frac{1}{k} a^2 \upsilon$

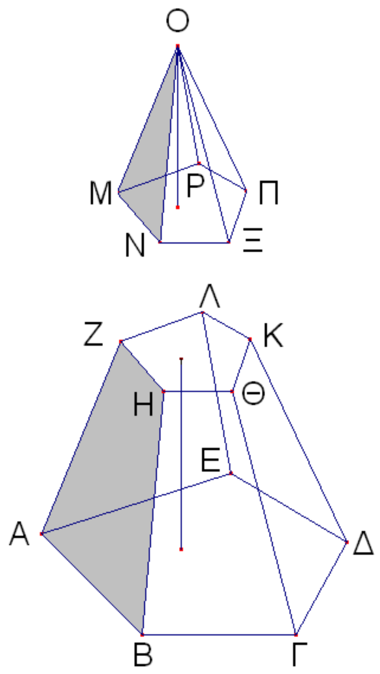


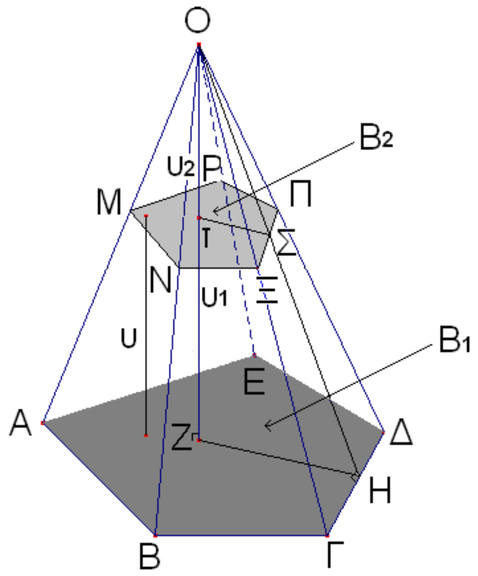
Ο κύβος με ακμή α αποτελείται από 6 τέτοιες πυραμίδες. Δηλαδή

$$a^3 = 6\frac{1}{k} a^2 \frac{a}{2} \text{ ή } k = \frac{1}{3}$$

Η Κόλουρη πυραμίδα

> μιά πολυεδρική γωνία και ένα επίπεδο που τέμνει όλες τις ακμές της καθώς και ένα άλλο παράλληλο προς το προηγούμενο επίπεδο λέγεται **Κόλουρη πυραμίδα**.





Ζητείται ο όγκος της κόλουρης πυραμίδας.

(Θα χρησιμοποιήσουμε ένα θεώρημα ως λήμμα ότι: [1]Αν δύο παράλληλα επίπεδα τμηθούν από ένα τρίτο οι τομές είναι ευθείες παράλληλες. Από αυτό δε συνάγεται ότι οι δύο βάσεις της κόλουρης πυραμίδας είναι όμοια πολύγωνα. Και από την επιπεδομετρία ξέρουμε ότι [2]ο λόγος δύο ομοίων επιπέδων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας,, δηλαδή δύο ομόλογων πλευρών τους)

Έστω η κόλουρη πυραμίδα ΑΒΓΔΕΜΝΞΠΡ, θα υπολογίσουμε τον όγκο της ως συνάρτηση του εμβαδού των βάσεων B_1 και B_2 και του ύψους της υ.

Προεκτείνουμε τις ακμές ΑΜ, ΒΝ, ΓΞ, ΔΠ, ΚΑΙ ΕΡ της κόλουρης πυραμίδας οι οποίες συναντώνται σε ένα σημείο (από τον ορισμό της κόλουρης) έστω το Ο. Σχηματίζεται έτσι άλλη μία πυραμίδα με βάση B_2 και ύψος υ_2.

Οπότε ο ζητούμενος όγκος είναι $V_K = V_{O,ABGDE} - V_{O,MN\Xi\Pi P}$. Δηλαδή:

$$V_k = \frac{1}{3}B_1\upsilon_1 - \frac{1}{3}B_2\upsilon_2$$

$$V_k = \frac{1}{3}(B_1\upsilon_1 - B_2\upsilon_2) \qquad (1)$$

Θα εκφράσουμε τώρα τα υ_1 και υ_2 συνάρτηση του εμβαδού των βάσεων B_1 και B_2 και του ύψους υ της κόλουρης πυραμίδας.

Από εφαρμογή του [2] έχουμε ότι $\frac{B_1}{B_2} = (\frac{\Gamma\Delta}{\Xi\Pi})^2$ που ισοδυναμεί με

$$\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}} = \frac{\Gamma\Delta}{\Xi\Pi} \qquad (2)$$

Πρέπει τώρα το δεύτερο λόγο της ισότητας αυτής να τον συσχετίσουμε με τα ύψη των δύο πυραμίδων. Αυτό φαίνεται εφικτό αν χρησιμοποιήσω το τρίγωνο ΟΖΗ στο οποίο συμμετέχουν τα ύψη.

Έστω $OZ \perp B_1$, δηλαδή $OZ=\upsilon_1$ το ύψος της μεγάλης πυραμίδας. Φέρνω από το Ζ την $ZH \perp \Gamma\Delta$ οπότε από το Θεώρημα των τριών καθέτων $OH \perp \Gamma\Delta$, δηλαδή η ΟΗ είναι το ύψος του τριγώνου ΟΓΔ. Όμοια $OT=\upsilon_2$ και $OT \perp B_2$, $T\Sigma \perp \Xi\Pi$ άρα $O\Sigma \perp \Xi\Pi$ είναι το ύψος του τριγώνου ΟΞΠ. Έτσι από τα όμοια τρίγωνα ΓΟΔ και ΞΟΠ έχουμε

$$\frac{\Gamma\Delta}{\Xi\Pi} = \frac{OH}{O\Sigma} \qquad (3)$$

Και από τα όμοια τρίγωνα ΟΖΗ και ΟΤΣ έχουμε ότι

$$\frac{OH}{O\Sigma} = \frac{OZ}{OT} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \qquad (4)$$

Από τις (2), (3), (4) έχουμε και ότι $\upsilon_1-\upsilon_2=\upsilon$

$$\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \text{ ή } \frac{\upsilon_1}{\sqrt{B_1}} = \frac{\upsilon_2}{\sqrt{B_2}} = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}} = \frac{\upsilon}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}$$

Από την ισότητα του πρώτου κλάσματος με το τελευταίο έχουμε:

$$\upsilon_1 = \frac{\upsilon\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}$$

Ενώ από το δεύτερο και το τελευταίο:

$$\upsilon_2 = \frac{\upsilon\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}$$

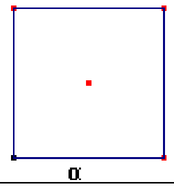
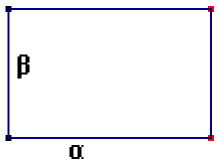
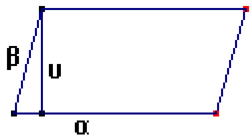
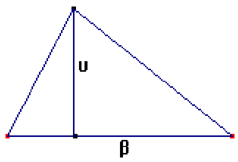
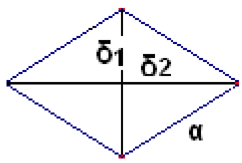
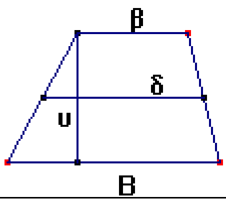
Αντικαθιστούμε τις δύο τελευταίες σχέσεις στην (1) και έχουμε

$$V_k = \frac{\upsilon}{3}\left(\frac{(\sqrt{B_1})^3 - (\sqrt{B_2})^3}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}\right)$$

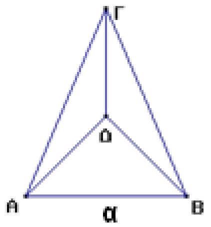
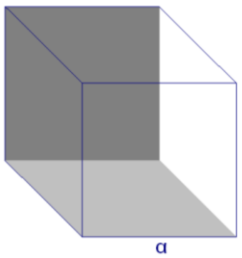
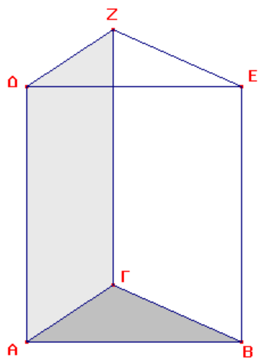
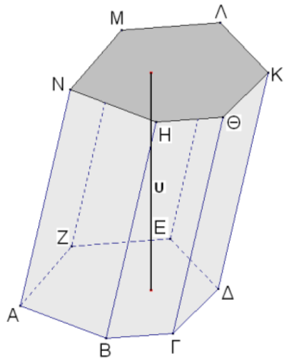
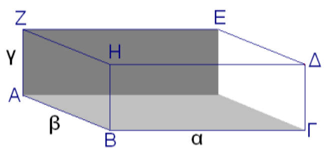
Και αξιοποιώντας τη γνωστή ταυτότητα: $(\alpha^3-\beta^3)=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)$ έχουμε τον τελικό τύπο:

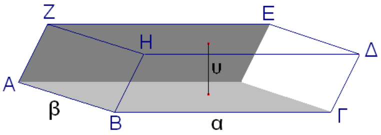
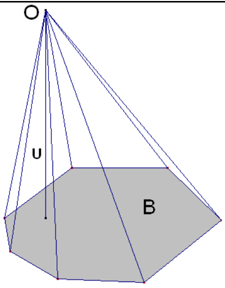
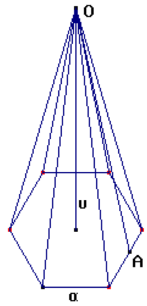
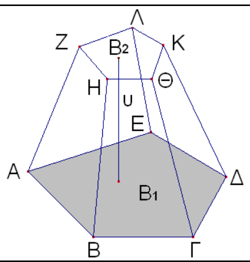
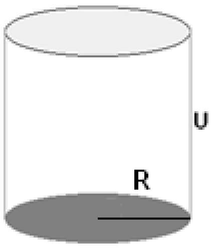
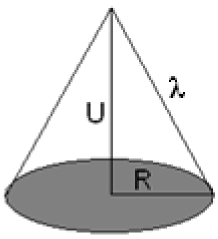
$$V_k = \frac{1}{3}\upsilon(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2})$$

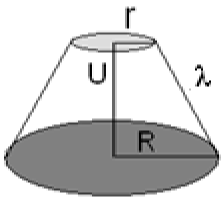
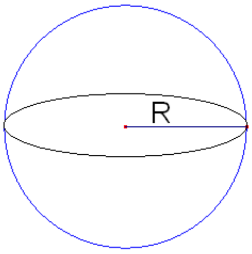
Περίμετροι και Εμβαδά επιπέδων σχημάτων

Τετράγωνο		Περίμετρος	Εμβαδόν
		$\Pi = 4\alpha$	$\mathrm{E} = \alpha^2$
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο		Περίμετρος	Εμβαδόν
		$\Pi = 2(\alpha + \beta)$	$\mathrm{E} = \alpha\beta$
Πλάγιο παραλληλόγραμμο		Περίμετρος	Εμβαδόν
		$\Pi = 2(\alpha + \beta)$	$\mathrm{E} = \alpha\upsilon$
Τρίγωνο		Περίμετρος	Εμβαδόν
		$\Pi = 2\tau = \alpha + \beta + \gamma$	$\mathrm{E} = \dfrac{\beta\upsilon}{2}$
Ρόμβος		Περίμετρος	Εμβαδόν
		$\Pi = 4\alpha$	$\mathrm{E} = \dfrac{\delta_1\delta_2}{2}$
Τραπέζιο		Περίμετρος	Εμβαδόν
		$\Pi = 4\alpha$	$\mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{B} + \beta}{2}\upsilon = \delta\upsilon$

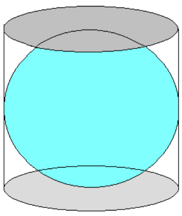
Επιφάνειες, παράπλευρες επιφάνειες, όγκοι στερεών

Κανονικό Τετράεδρο πλευράς α		Ύψος $\upsilon = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ Όλα τα ύψη ενός κανονικού τετραέδρου είναι ίσα μεταξύ τους.	Συνολική επιφάνια $E_\sigma = \alpha^2\sqrt{3}$	Όγκος $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Κύβος		Συνολική επιφάνεια $E_\sigma = 4\alpha^2$	Παράπλευρη επιφάνεια $E_\pi = 6\alpha^2$	Όγκος $V = \alpha^3$
Ορθό Πρίσμα		Συνολική επιφάνεια Περίμετρος της βάσης, επί το ύψος, συν το εμβαδόν των δύο βάσεων	Παράπλευρη επιφάνεια Περίμετρος της βάσης, επί το ύψος	Όγκος $V = B\upsilon$ (εμβαδόν της βάσης επί το ύψος)
Πλάγιο Πρίσμα		Συνολική επιφάνεια Περίμετρος της βάσης, επί το παράπλευρο ύψος, συν το εμβαδόν των δύο βάσεων	Παράπλευρη επιφάνεια Περίμετρος της βάσης, επί το παράπλευρο ύψος,	Όγκος $V = B\upsilon$ (εμβαδόν της βάσης επί το ύψος)
Ορθογώνιο παραλ/πεδο		Συνολική επιφάνεια $E_\sigma = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)$	Παράπλευρη επιφάνεια $E_\sigma = 2(\alpha + \beta)\gamma$	Όγκος $V = \alpha\beta\gamma$

<table>
<tr><td rowspan="2">Πλάγιο παραλληλεπίπεδο</td><td rowspan="2">
</td><td colspan="3">Όγκος</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$V = \alpha\beta\upsilon$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Πυραμίδα</td><td rowspan="2">
</td><td colspan="3">Όγκος</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$V = \frac{1}{3}\mathrm{B}\upsilon$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κανονική εξαγωνική πυραμίδα</td><td rowspan="2">
</td><td>Συνολική επιφάνεια</td><td>Παράπλευρη επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td colspan="3">Αφήνεται ως άσκηση</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κόλουρη Πυραμίδα</td><td rowspan="2">
</td><td colspan="3">Όγκος</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$V_k = \frac{1}{3}\upsilon(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2})$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κύλινδρος</td><td rowspan="2">
</td><td>Συνολική επιφάνεια</td><td>Παράπλευρη επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{E}_\sigma = 2\pi R(\upsilon + R)$</td><td>$\mathrm{E}_\pi = 2\pi R\upsilon$</td><td>$V = \pi R^2\upsilon$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κώνος</td><td rowspan="2">
</td><td>Συνολική επιφάνεια</td><td>Παράπλευρη επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{E}_\sigma = \pi R(\lambda + R)$</td><td>$\mathrm{E}_\pi = \pi R\lambda$</td><td>$V = \frac{1}{3}\pi R^2\upsilon$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Κόλουρος Κώνος</td><td rowspan="2">
</td><td>Συνολική επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td>$E_\sigma = \pi\lambda(R+r)+\pi(R^2+r^2)$</td><td>$V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2+r^2+Rr)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Σφαίρα</td><td rowspan="2">
</td><td>επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td>$E_{\sigma\varphi} = 4\pi R^2$</td><td>$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi R^3$</td></tr>
</table>

Θεώρημα του Αρχιμήδη: Η επιφάνεια μιας σφαίρας εγγεγραμμένης σε κύλινδρο είναι ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου.



Απόδειξη: Έστω R η ακτίνα της σφαίρας. Η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου

$$E_\pi = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$$

Όσο και η επιφάνεια της σφαίρας