Λύσεις των θεμάτων Μαθηματικής Λογικής

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

5 Σεπτεμβρίου 2014

Οι φοιτητές που έχουν δηλώσει το μάθημα προηγούμενες φορές στο παρελθόν να απαντήσουν τα επόμενα τέσσερα θέματα.

Θέμα 1: α) Αποδείξτε ότι είναι λογικά ισοδύναμες μεταξύ τους οι προτάσεις:

$$(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \leftrightarrow \varphi_3 \quad \text{και} \quad \varphi_1 \leftrightarrow (\varphi_2 \leftrightarrow \varphi_3)$$

β) Αποδείξτε ότι η πρόταση

$$(A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3$$

παίρνει αληθοτιμή 0 ακριβώς στην περίπτωση όπου μόνο η μια ή και οι τρεις μεταβλητές παίρνουν αληθοτιμή 0.

γ) Αποδείξτε ότι η πρόταση

$$(...(A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3)...) \leftrightarrow A_n,$$

$n \geq 3$, παίρνει αληθοτιμή 0 ακριβώς στην περίπτωση όπου περιττό πλήθος προτασιακών μεταβλητών παίρνει την τιμή 0. (3 μονάδες)

Λύση: α) Απλός έλεγχος με αληθοπίνακα.

β) Εστω ότι η πρόταση παίρνει αληθοτιμή 0. Τότε, αν $v(A_3) = 0$, πρέπει να είναι $v(A_1 \leftrightarrow A_2) = 1$. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει ή και οι δυο άλλες μεταβλητές να πάρουν αληθοτιμή 0, οπότε και οι τρεις μεταβλητές παίρνουν αληθοτιμή 0, ή και οι δύο να πάρουν αληθοτιμή 1, οπότε μόνο μια μεταβλητή παίρνει αληθοτιμή 0. Αν $v(A_3) = 1$, τότε πρέπει $v(A_1 \leftrightarrow A_2) = 0$, οπότε μόνο μια από τις A_1, A_2 θα πάρει αληθοτιμή 0.

γ) Το δείχνουμε επαγωγικά στο πλήθος των προτασιακών μεταβλητών. Για $n = 3$ (βάση της επαγωγής) ο ισχυρισμός μας αληθεύει από το προηγούμενο υπο-ερώτημα. Δεχόμαστε ότι αληθεύει για την πρόταση

$$(...(A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3)...) \leftrightarrow A_n$$

και δείχνουμε ότι αληθεύει για την πρόταση

$$(((...(A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3)...) \leftrightarrow A_n) \leftrightarrow A_{n+1}.$$

Επιχειρηματολογούμε όπως παραπάνω: Αν $v(A_{n+1}) = 0$, πρέπει να είναι

$$v((...(A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3)...) \leftrightarrow A_n) = 1.$$

Αφού συμβαίνει αυτό ξέρουμε, από την επαγωγική υπόθεση, ότι άρτιο πλήθος από τις μεταβλητές A_1, ..., A_n θα πάρει αληθοτιμή 0, οπότε συνολικά περιττό πλήθος θα πάρουν αληθοτιμή 0. Αν $v(A_{n+1}) = 1$, τότε πρέπει

$$v((...(A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3)...) \leftrightarrow A_n) = 0,$$

οπότε, από την επαγωγική υπόθεση, περιττό πλήθος μεταβλητών μεταξύ των A_1, ..., A_n θα πάρει αληθοτιμή 0. Συνολικά, επομένως, περιττό πλήθος μεταβλητών μεταξύ των A_1, ..., A_n, A_{n+1} θα πάρει αληθοτιμή 0.

Θέμα 2: Αποδείξτε ότι το σύνολο συνδέσμων $\{\wedge, \leftrightarrow, \veebar\}$, όπου $\veebar$ είναι ο σύνδεσμος της αποκλειστικής διάζευξης, είναι επαρκές. (2 μονάδες)

Λύση: Αφού στο σύνολο αυτό περιλαμβάνεται ο σύνδεσμος της σύζευξης και γνωρίζουμε ότι η σύζευξη μαζί με την άρνηση αποτελούν επαρκές σύνολο συνδέσμων, αρκεί με τη βοήθεια των τριών αυτών συνδέσμων να εκφράσουμε το σύνδεσμο της άρνησης, δηλαδή να βρούμε μια πρόταση ισοδύναμη με την $\neg\varphi$, που στη γραφή της περιλαμβάνει μόνο (κάποιους από) τους συνδέσμους του συνόλου $\{\wedge, \leftrightarrow, \veebar\}$. Ξέρουμε ότι η $\varphi \veebar \varphi$ είναι πάντα ψευδής πρόταση. Παρατηρούμε λοιπόν ότι, επειδή η $(\varphi \veebar \varphi) \to \varphi$ είναι ταυτολογία,

$$\varphi \leftrightarrow (\varphi \veebar \varphi) \;\equiv\; (\varphi \to (\varphi \veebar \varphi)) \wedge ((\varphi \veebar \varphi) \to \varphi) \;\equiv\; \varphi \to (\varphi \veebar \varphi) \;\equiv \neg\varphi$$

Θέμα 3: Αποδείξτε ότι

$$\{\varphi \to (\sigma \wedge \chi), \neg\rho, \neg\varphi \to (\tau \vee \rho), \neg\sigma\} \;\models\; \tau$$

(2 μονάδες)

Λύση: Εστω ότι η αποτίμηση v κάνει αληθείς τις προτάσεις του συνόλου στ' αριστερά. Τότε αφού $v(\neg\sigma) = 1$, είναι $v(\sigma) = 0$, άρα και $v(\sigma \wedge \chi) = 0$. Αφού όμως είναι $v(\varphi \to (\sigma \wedge \chi)) = 1$, πρέπει $v(\varphi) = 0$, δηλαδή $v(\neg\varphi) = 1$. Επειδή επιπλέον έχουμε $v(\neg\varphi \to (\tau \vee \rho)) = 1$, πρέπει $v(\tau \vee \rho)) = 1$. Ομως έχουμε και $v(\neg\rho) = 1$, δηλαδή $v(\rho) = 0$. Αρα πρέπει $v(\tau) = 1$.

Θέμα 4: Εστω μια γλώσσα L της κατηγορηματικής λογικής που περιέχει ένα σχεσιακό σύμβολο δυο θέσεων R και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο $+$.

α) Γράψτε προτάσεις της γλώσσας αυτής που να εκφράζουν ότι, η σχέση που ερμηνεύει το R, έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Η σχέση είναι μεταβατική.

(ii)Αν δυο στοιχεία σχετίζονται, τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο ώστε τα αθροίσματά του με αυτά επίσης σχετίζονται.

β) Γράψτε προτάσεις ισοδύναμες με τις αρνήσεις των παραπάνω ιδιοτήτων, με τρόπο ώστε ο σύνδεσμος της άρνησης να εφαρμόζεται μόνο στο σχεσιακό σύμβολο R.

γ) Αν ερμηνεύσουμε τις παραπάνω προτάσεις αυτές στη δομή των πραγματικών αριθμών, με το σύμβολο R να σημαίνει τη σχέση της αυστηρής διάταξης και το $+$ να έχει τη συνηθισμένη σημασία, αληθεύουν οι προτάσεις;

(3 μονάδες)

Λύση: α) (i) Η σχέση είναι μεταβατική:

$$\forall x \forall y \forall z(\ (R(x,y) \wedge R(y,z))\ \rightarrow\ R(x,z))$$

(ii)Αν δυο στοιχεία σχετίζονται, τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο ώστε τα αθροίσματά του με αυτά επίσης σχετίζονται:

$$\forall x \forall y (R(x,y)\ \rightarrow\ \exists z R(x+z, y+z))$$

β) Οι αρνήσεις, αντίστοιχα, είναι

$$\exists x \exists y \exists z(\ (R(x,y) \wedge R(y,z))\ \rightarrow\ \neg R(x,z))$$

και

$$\exists x \exists y (R(x,y)\ \rightarrow\ \forall z \neg R(x+z, y+z))$$

γ) Για την αυστηρή διάταξη μεταξύ πραγματικών αριθμών γνωρίζουμε ότι είναι μεταβατική. Σε ότι αφορά τη δεύτερη πρόταση, αν έχουμε πραγματικούς αριθμούς a, b, τέτοιους ώστε $a < b$, προφανώς $a + c < b + c$, για οποιονδήποτε πραγματικό αρίθμό c. Επομένως, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, b, αν $a < b$, υπάρχει πραγματικός αριθμός ώστε $a + c < b + c$. Δηλαδή και η δεύτερη πρόταση αληθεύει στη δομή των πραγματικών αριθμών.

Οι φοιτητές που πήραν φέτος για πρώτη φορά το μάθημα να απαντήσουν τα Θέματα 1, 4 καθώς και σε **ένα εκ των 2, 3** και να συνεχίσουν με το παρακάτω:

Θέμα 5: Θεωρούμε μια γλώσσα L της Κατηγορηματικής Λογικής και δυο δομές $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ γι αυτήν τη γλώσσα. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\Gamma_{\mathcal{A}} = \{\sigma \in \mathrm{Sent}(L) \mid \mathcal{A} \models \sigma\} \quad \text{και} \quad \Gamma_{\mathcal{B}} = \{\sigma \in \mathrm{Sent}(L) \mid \mathcal{B} \models \sigma\}$$

($\mathrm{Sent}(L)$ είναι το σύνολο των προτάσεων που γράφονται στη γλώσσα L). Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\Gamma_{\mathcal{A}} \cup \Gamma_{\mathcal{B}}$ είναι αντιφατικό. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια πρόταση σ στο σύνολο $\Gamma_{\mathcal{A}}$ ώστε, $\mathcal{B} \models \neg\sigma$.

(2 μονάδες)

Λύση: Αφού το σύνολο $\Gamma_{\mathcal{A}} \cup \Gamma_{\mathcal{B}}$ είναι αντιφατικό, από το Θεώρημα του Συμπαγούς, κάποιο πεπερασμένο υποσύνολό του είναι αντιφατικό. Αυτό θα έχει τη μορφή

$$\Gamma = \{\sigma_1, ..., \sigma_m, \sigma'_1, ..., \sigma'_n\},$$

όπου σ_1, ...,$\sigma_m \in \Gamma_{\mathcal{A}}$ και σ'_1,...,$\sigma'_n \in \Gamma_{\mathcal{B}}$. Παρατηρούμε ότι σε αυτό το σύνολο υποχρεωτικά υπάρχουν κάποιες προτάσεις σ_1, ...,$\sigma_m \in \Gamma_{\mathcal{A}}$, γιατί διαφορετικά θα είχαμε ότι ένα σύνολο προτάσεων του $\Gamma_{\mathcal{B}}$ θα ήταν αντιφατικό, πράγμα αδύνατο αφού όλες αυτές οι προτάσεις επαληθεύονται στη δομή $\mathcal{B}$. Θεωρούμε λοιπόν την πρόταση $\sigma = \sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_m$. Αυτή δε μπορεί να αληθεύει στη δομή $\mathcal{B}$, αφού τότε το σύνολο Γ θα επαληθευόταν στη δομή $\mathcal{B}$ (οι σ'_1 , ..., σ'_n επαληθεύονται εξ ορισμού στη $\mathcal{B}$). Επομένως $\mathcal{B} \models \neg\sigma$.