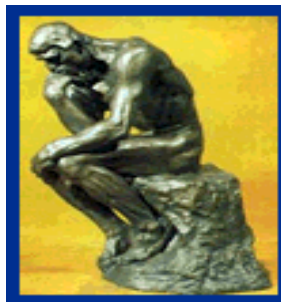


ΕΥΤΥΧΗΣ ΠΑΠΑΔΟΠΕΤΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυσικές Γλώσσες
και
Μαθηματικός λόγος



Για τις ανάγκες του ακαδημαϊκού έτους 2012-2013

Εισαγωγικές Έννοιες

0. Η Γλώσσα και ο Λόγος

0.1 Η γλώσσα

Για τις ανάγκες της διερεύνησης που ακολουθεί μας αρκεί να θεωρήσουμε τη γλώσσα ως ένα σύστημα που συγκροτείται από τρία τουλάχιστον σύνολα:

α) Ένα πεπερασμένο (και ενίοτε άπειρα αριθμήσιμο) σύνολο συμβόλων, **το αλφάβητο**.

Για παράδειγμα τα 25 σύμβολα, που έχουμε συνηθίσει να τα λέμε γράμματα, που χρησιμοποιούμε όταν γράφουμε την ελληνική γλώσσα, ή τα 10 σύμβολα που τα λέμε και ψηφία, με τη βοήθεια των οποίων γράφουμε τους αριθμούς.

β) Ένα πεπερασμένο σύνολο από **κανόνες σύνταξης**. Οι κανόνες αυτοί καθορίζουν τη σειρά με την οποία πρέπει να τεθούν τα στοιχεία του αλφάβητου το ένα δίπλα στο άλλο, ώστε να συγκροτήσουν καλές, (ή επιτρεπτές, ή **γραμματικώς ορθές**) ακολουθίες.

Για παράδειγμα, αν διαλέξουμε τα σύμβολα A, Σ, Γ, O, A , αυτά μπορούν να συνταχθούν με διάφορους τρόπους: καλούς όπως ΛΑΓΟΣ, ΛΟΓΑΣ, ΑΛΓΟΣ, ΓΑΛΟΣ, και κακές όπως: ΛΓΑΟΣ, ΑΟΣΛΓ, κλπ.

γ) Ένα σύνολο από **κανόνες σήμανσης ή σημασίας**, ή σημασιολογικούς κανόνες. Οι κανόνες αυτοί αποδίδουν σημασία σε κάθε στοιχείο (π.χ. ένα γράμμα), ή καλή ακολουθία στοιχείων του αλφάβητου (**λέξη**) η οποία ενδεχομένως να συμμετέχει στη συγκρότηση μιας ολόκληρης σειράς από ακολουθίες (**φράση**).

Το παραπάνω πλαίσιο δεν αποτελεί ένα αναλυτικό ορισμό για τις φυσικές γλώσσες, τις γλώσσες δηλαδή που μιλάμε μέσα στα πλαίσια της καθημερινότητάς μας. Αφήνει απέξω σημαντικούς τομείς των γλωσσών αυτών όπως η φωνολογία, η ετυμολογία, η ορθογραφία κ.τ.λ.. Αποτελεί όμως αναλυτικό ορισμό για τις τεχνητές γλώσσες, που θα δούμε παρακάτω, ενώ θέτει ένα κριτήριο με βάση το οποίο μπορούμε να αποφανθούμε αν ένα σύστημα αποτελεί ή όχι γλώσσα, αρκεί να διαθέτει τους τρεις βασικούς τομείς της γλώσσας: το *αλφάβητο* τη *σύνταξη* και τη *σημασιολογία*. Η οριοθέτηση αυτή του συνόλου των γλωσσών, μας επιτρέπει να προχωρήσουμε σε μια ταξινόμηση των γλωσσών που συναντά ένας μαθητής κατά τη διάρκεια της μαθητείας του.

Η κάθε τέτοια γλώσσα πρέπει να μελετηθεί ξεχωριστά. Πρέπει να εξεταστούν οι σχέσεις των γλωσσών αυτών και μεταξύ τους και, πολύ περισσότερο, η σχέση κάθε τέτοιας γλώσσας με τη φυσική γλώσσα του μαθητή, δηλαδή τη μητρική του γλώσσα.

Ας δούμε τον καθένα από αυτούς τους τομείς ξεχωριστά:

Το αλφάβητο:

Το αλφάβητο μπορεί να αποτελείται από σύμβολα:

- i) **Ατομικού τύπου**, δηλαδή κάθε σύμβολο να είναι ένα μεμονωμένο γράμμα, ή γράμμα: Τέτοιο είναι το αλφάβητο του σημερινού σε χρήση συστήματος αρίθμησης, που αποτελεί τη γλώσσα των φυσικών αριθμών: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \}$
Απ' αυτό κατασκευάζονται οι λέξεις που αποτελούν τα **ονόματα των αριθμών**. Όπως 154, 100059687 κ.τ.λ..
- ii) **Μοριακού τύπου**, δηλαδή συναρμογές ατομικών συμβόλων. Τα αμιγώς μοριακού τύπου αλφάβητα είναι σπάνια. Τέτοιο αλφάβητο μπορεί να θεωρηθεί το αλφάβητο του θεσιακού εξηκονταδικού συστήματος των Βαβυλωνίων του οποίου τα 60 απαιτούμενα σύμβολα ήταν συναρμογές ενός και μόνο συμβόλου της σφήνας: ∇ το οποίο τοποθετημένο κατάλληλα παράγει άλλο ένα σύμβολο $\blacktriangleleft$, και της κενής θέσης που παίζει το ρόλο του μηδενός. Δηλαδή τα ονόματα των αριθμών μέχρι το 59 κατασκευάζονται με τη σύνταξη των αθροιστικών συστημάτων ως εξής:



Το 60 συμβολίζεται πάλι με μια σφήνα ∇ η οποία κατανοείται ως 60 από τα συμφραζόμενα, ενώ στα ονόματα των μεγαλύτερων από το 60 αριθμών αξιοποιείται η κενή θέση, η οποία παίζει το ρόλο του μηδενός. Έτσι το 61 είναι $\nabla \nabla$, και το 601 $\blacktriangleleft \nabla$.

- iii) **Μεικτού τύπου**, δηλαδή μείγμα των δύο προηγούμενων περιπτώσεων. Το αλφάβητο, για παράδειγμα, της Ελληνικής γλώσσας ήταν αρχικά ένα αλφάβητο ατομικού τύπου. Όμως μετά τη μονοφώνηση των διφθόγγων, το αλφάβητο της Ελληνικής διαθέτει και

σύμβολα μοριακού τύπου τα *ει, οι, αι* και *ου*, τα οποία συμμετέχουν ως συναρμογές, σαν να είναι δηλαδή ένα σύμβολο, στο σχηματισμό των λέξεων.

Ως προς τον αριθμό των στοιχείων του ένα αλφάβητο μπορεί να είναι πεπερασμένο, όπως είναι τα αλφάβητα των φυσικών γλωσσών, (το Ελληνικό, το Λατινικό, κλπ) και των γλωσσών για του αριθμούς, των αριθμητικών δηλαδή συστημάτων. Υπάρχουν όμως και γλώσσες που διαθέτουν άπειρο, αλλά αριθμήσιμο αλφάβητο, όπως είναι η γλώσσα του προτασιακού, ή και του κατηγορηματικού λογισμού.

Οι κανόνες σύνταξης:

Με βάση τους κανόνες αυτούς συν-τάσσονται, τίθενται το ένα δίπλα στο άλλο, τα στοιχεία του αλφάβητου για να δώσουν τις **λέξεις**, ή/και (όπως θα δούμε πιο κάτω) τις **φράσεις** της γλώσσας. Οι κανόνες αυτοί είναι οι κανόνες σύνταξης μιας φυσικής γλώσσας, αλλά μπορεί να είναι και εσωτερικοί συνδυαστικοί νόμοι σ' ένα σύνολο σημάτων, πράξεις δηλαδή αλγεβρικού τύπου μέσα σε ένα σύνολο.

Οι συντακτικοί κανόνες, για παράδειγμα της φυσικής μας γλώσσας δεν παράγουν την ακολουθία «*αικ*» ενώ με τα ίδια στοιχεία παράγουν την «*και*». Επίσης, σύμφωνα με τους κανόνες σύνταξης της συμβολικής γλώσσας των αριθμών που χρησιμοποιούμε σήμερα, δηλαδή Ινδοαραβικού συστήματος αρίθμησης, η ακολουθία 00000013 δεν είναι αποδεκτή, δηλαδή δεν είναι λέξη της γλώσσας των αριθμών, ενώ η 13, όπως και κάθε άλλη που δεν αρχίζει από 0, είναι.

Αν φανταστούμε το σύνολο των λέξεων της Ελληνικής γλώσσας, το Ελληνικό δηλαδή λεξιλόγιο ως ένα μεικτό αλφάβητο, τότε με την εφαρμογή των συντακτικών κανόνων έχουμε ως αποτέλεσμα γραμματικώς ορθές ακολουθίες, δηλαδή φράσεις, της ελληνικής. Για παράδειγμα η ακολουθία «το παιδί πέταξε το τόπι» είναι φράση, όπως επίσης είναι φράση και σχεδόν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των συνταγμάτων που τη αποτελούν: «το παιδί», «πέταξε», «το τόπι»:

- 1) «το παιδί πέταξε το τόπι»
- 2) «το παιδί το τόπι πέταξε»
- 3) «πέταξε το παιδί το τόπι»
- 4) «πέταξε το τόπι το παιδί»
- 5) «το τόπι το παιδί πέταξε»
- 6) «το τόπι πέταξε το παιδί»

Αντίθετα η «το παιδί πέταξε του τόπι» δεν είναι φράση αφού παραβιάζεται ένας σημαντικός κανόνας σύνταξης που υπογορεύει ότι το αντικείμενο μιας φράσης τίθεται πάντα

σε αιτιατική πτώση. Πρόκειται για μια μη γραμματικά ορθή ακολουθία λέξεων αφού παραβιάζεται ο συντακτικός κανόνας που προαναφέραμε.

Παράδειγμα 1: Ας δούμε ένα τυχαίο παράδειγμα σύνταξης: Ας υποθέσουμε πως διαθέτουμε ένα αλφάβητο το $\{a,b\}$ και ως κανόνα σύνταξης τον

$\Sigma_1 = \langle \text{Παράθεση των στοιχείων του αλφάβητου χωρίς κανένα περιορισμό} \rangle$.

Στη περίπτωση αυτή οποιαδήποτε ακολουθία στοιχείων του $\{a,b\}$ είναι καλή (αποδεκτή):

$a, b, aa, bb, ab, ba, aaaa, bbbb, abab, abba, baab, baab, bbaa, \dots$

Ας αντικαταστήσουμε τον κανόνα σύνταξης από τον:

$\Sigma_2 = \langle \text{Παράθεση των στοιχείων του αλφάβητου με τον περιορισμό} \rangle$
ποτέ ένα σύμβολο δεν ακολουθείται από τον εαυτό του.

Στη περίπτωση αυτή οι αποδεκτές ακολουθίες είναι:

$a, b, ab, ba, abab, abba, baab, baab, \dots$

Ενώ αν θέσουμε ως κανόνα σύνταξης τον:

$\Sigma_3 = \langle \text{Παράθεση των στοιχείων του αλφάβητου με τον περιορισμό} \rangle$
ποτέ μια ακολουθία δεν αρχίζει από α

οι αποδεκτές ακολουθίες είναι:

$a, b, ba, bb, baab, baab, bbaa, bbaa, baab, baab, bbaa, \dots$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση των κανόνων Σ_2 και Σ_3 τα σύνολα των λέξεων που προκύπτουν είναι υποσύνολα του συνόλου αυτών που προκύπτουν από τον Σ_1 .

Οι κανόνες σημασίας:

Είναι οι κανόνες που δίνουν περιεχόμενο (σημασία) στις λέξεις και τις φράσεις.

Μπορούμε να περιγράψουμε τους σημασιολογικούς κανόνες ως σχέσεις αντιστοίχισης από το σύνολο των λέξεων $\mathcal{A}$ στο σύνολο των σημασιών Σ :

$$x \mapsto f(x) = y$$

Μια τέτοια σχέση f , δεν είναι κατ' ανάγκην συνάρτηση.

Υπάρχουν γλώσσες στις οποίες η σχέση αυτή δεν είναι συνάρτηση, όπως είναι οι καθομιλούμενες γλώσσες: Η λέξη *λόγος* αντιστοιχίζεται σε, πολλές σημασίες όπως, *ομιλία, λαλιά, αγόρευση, υπόσχεση, βεβαίωση, αιτία, αφορμή, πηλίκιο κλπ.*

Υπάρχουν όμως και γλώσσες στις οποίες η σχέση αυτή είναι συνάρτηση, και μάλιστα αμφιμονοσήμαντη, όπως είναι οι γλώσσες των αριθμών, τα αριθμητικά δηλαδή συστήματα: Αν στο σύστημα που περιγράψαμε παραπάνω (στο παράδειγμα 1) εισάγουμε ως κανόνα σημασίας τη συνάρτηση f , από το σύνολο των λέξεων $\mathcal{A}$, στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathcal{N}$, ως σύνολο σημασιών, και με τη συμφωνία ότι τα στοιχεία του θα τα συμβολίζουμε με τα

ονόματα που έχουν στο Ινδοαραβικό αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιούμε σήμερα, τότε η f , είναι:

$$f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{N}$$

Τέτοια ώστε $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=1$ και γενικά την ακολουθία $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ με $a_i \in \{\alpha, \beta\}$ τη στέλνει σε ένα στοιχείο του $\mathcal{N}$, ως εξής:

$$f(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \dots + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0$$

Τότε έχουμε μια πλήρη γλώσσα που δεν είναι άλλη από μια δυαδική γλώσσα για τους αριθμούς, ένα δυαδικό σύστημα αρίθμησης, που αντί για τα ψηφία 0 και 1 έχει τα α και β .

Έτσι η ακολουθία των αριθμών, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10...γράφεται σ' αυτήν τη γλώσσα:

$$\alpha, \beta, \beta\alpha, \beta\beta, \beta\alpha\alpha, \beta\alpha\beta, \beta\beta\alpha, \beta\beta\beta, \beta\alpha\alpha\alpha, \beta\alpha\alpha\beta, \dots$$

και η ακολουθία $\beta\beta\alpha\beta\alpha\beta\beta$ είναι το όνομα του 107 στη γλώσσα αυτή.

Παράδειγμα 2.

Ένα τριαδικό σύστημα γραφής των αριθμών, είναι μια άλλη γλώσσα των φυσικών αριθμών η εξής:

Αλφάβητο: $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$

Κανόνες σύνταξης: Παράθεση των στοιχείων του $\mathcal{A}$ με τον περιορισμό ότι μια ακολουθία είναι καλή (αποδεκτή) μόνο αν δεν έχει ως πρώτο από αριστερά σύμβολο το 0, με εξαίρεση την «0».

Κανόνες σημασίας: Το σύνολο των κανόνων σημασίας περιγράφεται από τη συνάρτηση :

$$f: \mathcal{A}' \rightarrow \Sigma$$

όπου $\mathcal{A}'$ είναι το σύνολο των επιτρεπτών (των καλών) ακολουθιών από το $\mathcal{A}$, και Σ το σύνολο των σημασιών, δηλαδή το σύνολο $\mathcal{N}$ των φυσικών αριθμών, τέτοια ώστε $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$ και γενικά την ακολουθία $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ με $a_i \in \{0, 1, 2\}$ τη στέλνει σε ένα στοιχείο του $\mathcal{N}$, ως εξής:

$$f(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + \dots + a_2 3^2 + a_1 3^1 + a_0 3^0$$

Ο κανόνας σημασίας ως διμελής σχέση f παίρνει μια λέξη x , το **σημαίνον**, και την αντιστοιχεί σε μια έννοια x το **σημαινόμενο** συγκροτώντας το **γλωσσικό σημείο** (x, y) .

Στις φυσικές γλώσσες, ιδιαίτερα όταν αυτές θεωρούνται διαχρονικά, η αντιστοίχιση αυτή δεν είναι ένα προς ένα. Η ίδια λέξη μπορεί να πάρει διαφορετικές σημασίες, όπως λέξη λόγος που αναφέραμε πιο πάνω. Αλλά και για την ίδια έννοια μπορεί να χρησιμοποιηθούν

διαφορετικές λέξεις, όπως για παράδειγμα για την έννοια του αριθμού που διαιρείται ακριβώς διά δύο την εποχή του Ευκλείδη δηλωνόταν από τη λέξη *άρτιος*, ενώ σήμερα λέγεται και *ζυγός*.

Η έννοια του γλωσσικού σημείου οφείλεται στους Στωικούς οι οποίοι είχαν συλλάβει την έννοια του γλωσσικού σημείου ως διατεταγμένη τριάδα: *σημαίνον*, *σημαινόμενο* και *τυγχάνον*, όπου το *τυγχάνον* είναι το πράγμα καθαυτό όπως υπάρχει στην πραγματικότητα. Απ' αυτά το *σημαίνον*, ως ήχος της φωνής και δευτερευόντως γραφή, και το *τυγχάνον* έχουν, όπως έλεγαν οι Στωικοί, υλική υπόσταση, ανήκουν στον ίδιο κόσμο που ανήκουν και τα πράγματα. Αντίθετα το *σημαινόμενο* και *λεκτόν*, όπως το θεωρούσαν οι Στωικοί, είναι ασώματο που θπάρχει μέσα στα πλαίσια της λογικής μας φαντασίας: «*Φασί δε λεκτόν είναι το κατά φαντασίαν λογικήν υφιστάμενον*» [Διογένης Λαέρτιος. 7.63.5]. Στη σύγχρονη γλωσσολογία, μετά τον F. de Saussure, έχει επικρατήσει η διμερής θεώρηση, όμως η τριμερής θεώρηση των Στωικών, πέρα από την ιστορική της σημασία, προσιδιάζει καλύτερα στην παιδική σκέψη.

Το γλωσσικό σημείο είναι προϊόν κοινωνικής σύμβασης. Αποτέλεσμα δηλαδή κοινωνικής συμφωνίας μέσα στα πλαίσια της γλωσσικής κοινότητας που χρησιμοποιεί μια συγκεκριμένη γλώσσα.

Σχόλιο: Το παραπάνω πλαίσιο αποτελεί αναλυτικό ορισμό για τις τεχνητές γλώσσες, ενώ αγκαλιάζει μόνο τους τρεις βασικούς τομείς των φυσικών γλωσσών (αλφάβητο, σύνταξη, σημασιολογία) αφήνοντας απέξω άλλους σημαντικούς τομείς όπως η φωνολογία, η ετυμολογία, η ορθογραφία κ.τ.λ

Το γεγονός ότι το πλαίσιο του ορισμού που δώσαμε παραπάνω αποτελεί αναλυτικό ορισμό για τις τεχνητές γλώσσες σημαίνει ότι αν δοθούν τα τρία αυτά σύνολα η γλώσσα είναι πλήρως ορισμένη, ενώ σε ότι αφορά τις φυσικές γλώσσες αγκαλιάζει μόνο τους τρεις βασικούς τομείς που κύρια μας ενδιαφέρουν εδώ, το αλφάβητο τη σύνταξη και τη σημασιολογία.

Είναι φανερό πως αν ένας από τα σύνολα αυτά αλλάξει τότε έχουμε δικαίωμα να μιλάμε για διαφορετική γλώσσα.

Σχόλιο: Ας σκεπτόμαστε την ελληνική γλώσσα ως σύστημα, σύμφωνο με την παραπάνω περιγραφή, το ατομικού τύπου αλφάβητο *Α* των 24 συμβόλων (τα κεφαλαία γράμματα) και με συντακτικούς και σημασιολογικούς κανόνες αυτούς που είναι ενσωματωμένοι στο γλωσσικό μας αισθητήριο, ανεξάρτητα από το αν διαθέτουμε, ή όχι, αναλυτική γνώση των κανόνων αυτών. Τότε, μια πραγμάτωση του συστήματος αυτού θα έχει ως αποτέλεσμα το

σύνολο των λέξεων της Ελληνικής γλώσσας, δηλαδή το λεξιλόγιο $\mathcal{A}$. Το $\mathcal{A}$ λοιπόν είναι η πρώτη δυνατή πραγμάτωση, μια *πραγμάτωση πρώτου βαθμού*.

Αν τώρα θεωρήσουμε ως αλφάβητο το $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}$ που είναι ένα αλφάβητο μοριακού τύπου, και ως σύνολο κανόνων σύνταξης και σημασιολογίας αυτού που πάλι διαθέτουμε στο γλωσσικό μας αισθητήριο και που μας καθορίζουν τη σειρά με την οποία τίθενται οι λέξεις για να δώσουν γραμματικώς ορθές ακολουθίες, δηλαδή φράσεις, τότε η πραγμάτωση αυτής της γλώσσας δεν θα είναι τίποτε άλλο από το σύνολο των φράσεων της Ελληνικής Φ . Το σύνολο Φ είναι αποτέλεσμα μιας *πραγμάτωσης δευτέρου βαθμού*.

Μπορούμε τώρα να θέσουμε το εξής ερώτημα: *Με αλφάβητο το $\mathcal{A} \cup \mathcal{A} \cup \Phi$ είναι δυνατή μια πραγμάτωση τρίτου βαθμού;* Είναι φανερό πως ναι. Όμως ποιος είναι ο χαρακτήρας των συντακτικών κανόνων. Τι μας υπαγορεύει τη σειρά με την οποία θα τεθούν οι φράσεις ώστε να δώσουν αποδεκτές ακολουθίες. Μια μερική (για ορισμένες ενότητες φράσεων) απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνει η Μαθηματική λογική, με την προϋπόθεση ότι οι φράσεις έχουν μαθηματικό περιεχόμενο.

0.2 Ο λόγος

Με δεδομένο τον ορισμό αυτό της γλώσσας, ο **λόγος** δεν είναι τίποτα άλλο από το αποτέλεσμα της υλοποίησης, της πραγμάτωσης, της γλώσσας, από το νοήμον κοινωνικό υποκείμενο. Η συνδυασμένη, δηλαδή, εφαρμογή των συντακτικών και σημασιολογικών κανόνων πάνω στο αλφάβητο· μια πολύπλοκη και καθόλου γραμμική διαδικασία.

Ο λόγος, ως διαδικασία πραγμάτωσης της γλώσσας, έχει πολλές δυνατότητες, ανάλογα, όχι μόνο με τη γλώσσα που πραγματώνεται, αν πρόκειται για γλώσσες διαφορετικών γλωσσικών κοινοτήτων, (Γαλλικά, Αλβανικά ή Ρώσικα), αλλά και αν πρόκειται για διαφορετική γλώσσα μέσα στα πλαίσια τη ίδιας γλωσσικής κοινότητας. Έτσι, εάν το αλφάβητο είναι σύνολο γραφημάτων το αποτέλεσμα της πραγμάτωσης είναι ο **Γραπτός λόγος**. Εάν το αλφάβητο είναι σύνολο φωνημάτων τότε έχουμε **Προφορικό λόγο**.

Όμως μέσα στα πλαίσια της ίδιας γλωσσικής κοινότητας υπάρχουν και άλλες δυνατότητες: Κατά την πραγμάτωση της νοηματικής γλώσσας των κωφάλαλων έχουμε το **Νοηματικό λόγο**. Εδώ το αλφάβητο είναι ένα σύνολο νευμάτων, με το κάθε νεύμα να είναι φορέας νοήματος. Ιδού μερικά νεύματα από τη νοηματική γλώσσα των αριθμών:



μηδέν



ένα



πέντε



έξι

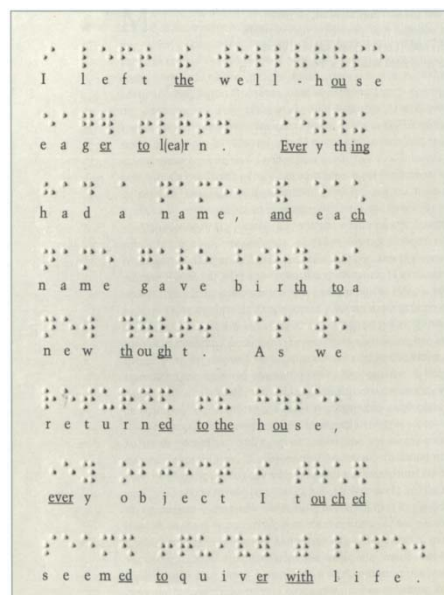


επτά



δέκα

Ακόμη ο λόγος μπορεί να είναι **απτικός** στη περίπτωση που το αλφάβητο αποτελείται από σύμβολα που γίνονται αντιληπτά με την αφή, όπως συμβαίνει με τη γλώσσα που είναι φτιαγμένη για τα παιδιά που γεννιούνται τυφλά. Έχουμε δηλαδή πραγμάτωση της γλώσσας Μπράιγ:

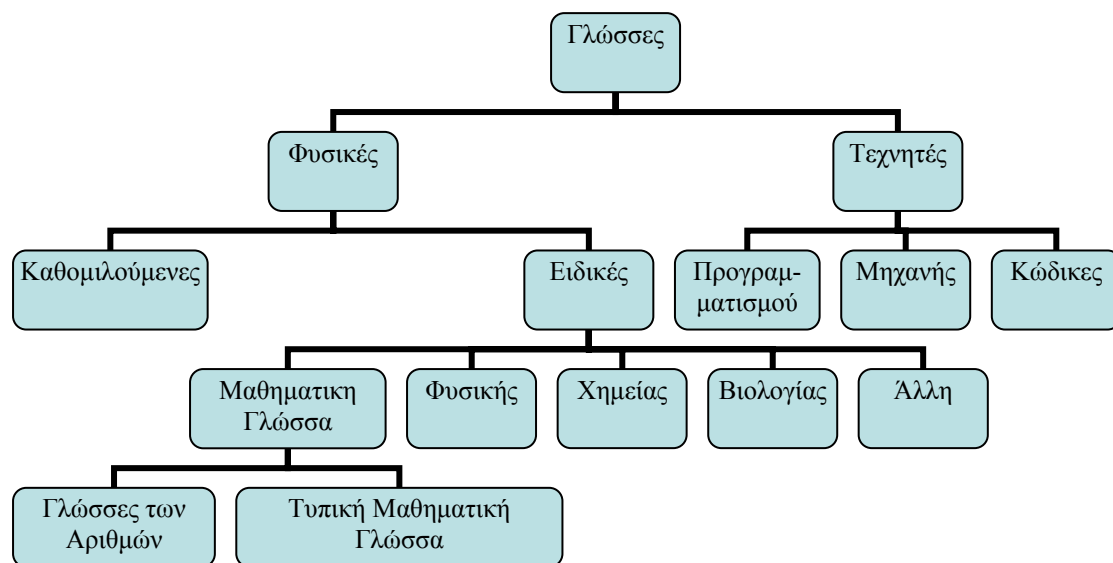


Σχόλιο: Για λόγους μεθοδολογικούς θα αντιμετωπίζουμε ως χρήση της ίδιας γλώσσας την πραγμάτωση του ίδιου συστήματος συντακτικών και σημασιολογικών κανόνων πάνω σε διαφορετικά αλφάβητα, πάνω σε διαφορετικούς υλικούς φορείς, όπως γίνεται κατά την ομιλία, τη γραφή με γραφίδα, με κουκίδες ή άλλα απτικά σύμβολα, και ακόμη την αντικατάσταση με γραπτά σύμβολα λέξεων, ή και ολόκληρων φράσεων, όπως γίνεται στο μαθηματικό συμβολισμό. Η τυπική μαθηματική γλώσσα γεννήθηκε από την ειδική μαθηματική γλώσσα, που ήταν αρχικά μόνο λεκτική, και είναι άμεσα μεταφράσιμη σ' αυτήν.

0.3 Μια ταξινόμηση των γλωσσών

Οι γλώσσες αναπτύσσονται στη βάση της ανάγκης του κοινωνικού ανθρώπου, και πολύ περισσότερο του ανθρώπου παραγωγού, για επικοινωνία. Απ' αυτή τη σκοπιά μπορούμε να τις διακρίνουμε σε **φυσικές**, που είναι οι γλώσσες οι οποίες διαμορφώνονται μέσα από την ανάγκη για διανθρώπινη επικοινωνία, και σε **τεχνητές**, που είναι οι γλώσσες που δημιουργούνται από τον άνθρωπο κάτω από την ανάγκη επικοινωνίας ανθρώπου με μηχανή ή μηχανής με μηχανή ή μερών της ίδιας μηχανής. Τέτοιες είναι οι γλώσσες προγραμματισμού και οι γλώσσες μηχανής τις οποίες έχει αναπτύξει η πληροφορική.

Οι φυσικές γλώσσες διακρίνονται σε **καθομιλούμενες** γλώσσες, που είναι οι γλώσσες που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος για διανθρώπινη επικοινωνία στα πλαίσια της καθημερινότητας, και σε **ειδικές** που δημιουργούνται από την ανάγκη ανταλλαγής, καταγραφής, και επεξεργασίας, πληροφοριών οι οποίες αναφέρονται σε μια πολύ συγκεκριμένη, συχνά αυστηρά ορισμένη, γνωστική περιοχή. Τέτοιες γλώσσες είναι τα γλωσσικά ιδιώματα κάποιων επαγγελματιών, οι επαγγελματικές δηλαδή αργκό, και όλες οι εξειδικευμένες επιστημονικές γλώσσες, όπως η γλώσσα των Μαθηματικών, της Φυσικής, της Χημείας, της Βιολογίας, της Πληροφορικής κ.τ.λ..



Κατά τη διάρκεια λοιπόν της μαθητείας του ένας νέος έρχεται σε επαφή με όλα αυτά τα είδη γλωσσών. Οι ειδικές γλώσσες της Αριθμητικής, της Γεωμετρίας, της Φυσικής, της Χημείας, και της Βιολογίας, διαφέρουν αρχικά από τη φυσική γλώσσα μόνο ως προς το σύστημα των σημασιολογικών κανόνων. Το *αρχικά* αυτό έχει μια φυλογενετική και μια οντογενετική σκοπιά. Οι γλώσσες αυτές και όταν εμφανίστηκαν στο προσκήνιο της ιστορίας αλλά και όταν πρωτοεμφανίζονται στα μάτια του μαθητή, η διαφορά τους από την καθομιλούμενη είναι μόνο ως προς το σύστημα των σημασιολογικών κανόνων. Αργότερα εφοδιάστηκαν και εφοδιάζονται και με δικό τους αλφάβητο.

Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της Ελληνικής Μαθηματικής Γλώσσας, η οποία διαμορφώθηκε στις απαρχές της ως μια ειδική γλώσσα μέσα στα πλαίσια της καθομιλουμένης, με σταδιακές αλλαγές αρχικά στο σύστημα των σημασιολογικών κανόνων. Για τις νέες έννοιες που ερχόταν στο φως πλάθονταν και νέες λέξεις για να τις εκφράσουν. Τέτοια ήταν η πορεία όλων των εξειδικευμένων επιστημονικών γλωσσών, όπως η γλώσσα της Φυσικής, της Χημείας, της Βιολογίας, κ.τ.λ..

Η σχέση που τελικά διαμορφώνεται μεταξύ μιας ειδικής γλώσσας και της καθομιλουμένης από την οποία προέρχεται είναι αμφίδρομη. Η ειδική γλώσσα είναι δυνατόν να επηρεάσει την καθομιλουμένη και ως προς το λεξιλόγιο, πλουτίζοντάς το με νέες λέξεις, και ως προς τη δομή. Έτσι η ανάπτυξη της πολύ ειδικής γλώσσας των αριθμών και συγκεκριμένα η καθιέρωση και πλατιά χρήση ενός εύχρηστου αριθμητικού συστήματος στην Αττική, μάλλον κατά το 402 π.Χ. [Mioni,1979,σ.55] που υιοθετήθηκε από τους Αθηναίους το Ιωνικό αλφάβητο για την καθομιλουμένη, οδήγησε στην ομαλοποίηση¹ της καθομιλουμένης σε σχέση με την έκφραση της απαριθμήσιμης πολλαπλότητας και τη σταδιακή εγκατάλειψη του δυϊκού αριθμού.

Οι τεχνητές γλώσσες, κατασκευασμένες από τον άνθρωπο για πολύ συγκεκριμένους σκοπούς και είναι πολύ φτωχές συγκρινόμενες με τις φυσικές. Διαθέτουν ιδιαίτερο αλφάβητο, ένα μικρό αριθμό από τυπικούς κανόνες σύνταξης, με έναν τουλάχιστον αναδρομικό, ενώ η σημασιολογία τους είναι αυστηρά οριοθετημένη, δηλαδή η σημασιολογική σχέση είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Τέτοιας φύσης είναι και ορισμένες γλώσσες με φυσική προέλευση, όπως η τυπική μαθηματική γλώσσα, και ιστορικά πριν απ' όλες οι γλώσσες των αριθμών, δηλαδή τα αριθμητικά συστήματα².

0.4 Ασκήσεις

1. Το σύστημα επικοινωνίας των πρώτων ασυρμάτων με τα σήματα μορς αποτελεί γλώσσα; Αν ναι ποιο το αλφάβητο, ποια η σύνταξη και ποια η σημασιολογία;
2. Η γλώσσα της οργανικής χημείας για την ονοματολογία των υδρογονανθράκων αποτελεί αυτοτελή γλώσσα;
3. Περιγράψτε μια γλώσσα προγραμματισμού και μια γλώσσα μηχανής.
4. Τα σήματα του κώδικα οδικής κυκλοφορίας αποτελούν γλώσσα;
5. Αποτελούν γλώσσα το σύνολο των σημάτων του οπτικού τηλεγράφου;

¹ Από τους τέσσερις τρόπους έκφρασης της πληθικότητας, ενικό, δυϊκό, συλλογικό και πληθυντικό, παρέμειναν μόνο δύο ο ενικός και ο πληθυντικός.

Υπενθύμιση από τη Μαθηματική Λογική

1. Προτασιακός λογισμός

1.1 Η γλώσσα του προτασιακού λογισμού

α) Το αλφάβητο

$$A = \{A, B, \Gamma, \dots, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup \{ (,), , \}$$

β) Η σύνταξη [ή αναδρομικός ορισμός των προτάσεων (Α.Ο.Π.)] περιέχει τρεις συντακτικούς κανόνες:

E_0 : Τα A, B , είναι προτάσεις. (Πρόκειται για τις ατομικές, ή απλές, προτάσεις που λέγονται και προτασιακές μεταβλητές, ή προτασιακά σύμβολα)

E_1 : Αν ρ και σ είναι προτάσεις τότε προτάσεις είναι και οι:

$$(\neg\rho), (\rho\wedge\sigma), (\rho\vee\sigma), (\rho\rightarrow\sigma), (\rho\leftrightarrow\sigma)$$

E_2 : Προτάσεις είναι μόνο ότι κατασκευάζεται με βάση το (E_0) και το (E_1).

Παράδειγμα: Οι παρακάτω ακολουθίες συμβόλων από το αλφάβητο του προτασιακού λογισμού είναι προτάσεις:

$$\begin{array}{ll} (\neg A), & ((A\leftrightarrow\Gamma)\rightarrow(B\wedge\Gamma)) \\ (A\wedge(\neg A)) & ((A\leftrightarrow\Gamma)\rightarrow((\neg\Delta)\vee(A\wedge B))) \\ ((A\leftrightarrow\Gamma)\rightarrow\Gamma) & ((\neg(\neg(\neg A)))\rightarrow A \end{array}$$

Ενώ δεν είναι προτάσεις οι ακολουθίες :

$$\begin{array}{ll} (\neg A & (\neg\wedge A) \\ ((A\leftrightarrow\Gamma)\rightarrow(\Gamma\wedge)) & (\vee) \\ (A\rightarrow\vee) & ((A\leftrightarrow\Gamma)\rightarrow((\neg)\vee(A\wedge B))) \end{array}$$

Κάθε μοναδική εφαρμογή κάποιου από τους συντακτικούς κανόνες, ονομάζεται (κατασκευαστικό) **βήμα**.

Ο πιο πάνω ορισμός είναι ένας τυπικός επαγωγικός ορισμός για το σύνολο Π των προτάσεων του προτασιακού λογισμού. Τα δύο κατασκευαστικά βήματα είναι τα εξής:

Βήμα 0 : $\Pi_0 := \{A, B, \Gamma, \dots, A_1, A_2, A_3, \dots, B_1, B_2, \dots, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Delta, \dots\}$

Το σύνολο αυτό περιέχει όλες τις προτασιακές μεταβλητές (ή προτασιακά σύμβολα) τα σύμβολα δηλαδή που προορίζονται για να συμβολίζουν τις απλούστερες δυνατές προτάσεις όπως: *είναι μέρα, το δύο είναι άρτιος αριθμός, το τρία είναι διαιρέτης του έξι, κλπ*

Βήμα n+1 : $\Pi_{n+1} := \Pi_n \cup \Pi_n^+$

Όπου οι προτάσεις Π_n^+ κατασκευάζονται από τις ήδη κατασκευασμένες:

$$\Pi_n^+ := \{\sigma_1 \square \sigma_2 / \sigma_1, \sigma_2 \in \Pi_n \text{ και } \square \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \} \cup \{ \neg \sigma / \sigma \in \Pi_n \}\}$$

Τελικά το σύνολο των προτάσεων του προτασιακού λογισμού δεν είναι άλλο από το

$$\Pi := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n$$

Ο συνολικός αριθμός των βημάτων που απαιτούνται για τη κατασκευή μιας πρότασης σ ονομάζεται **μήκος** της πρότασης και συμβολίζεται $\ell(\sigma)$. Δηλαδή: $\ell: \Pi \rightarrow \mathbb{N}$

Έτσι:

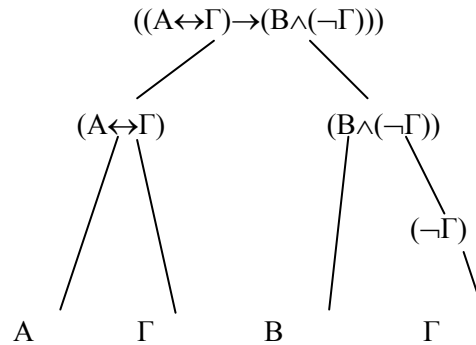
$$\ell(((A \leftrightarrow \Gamma) \rightarrow \Gamma)) = 2,$$

$$\ell((A \wedge (\neg A))) = 2,$$

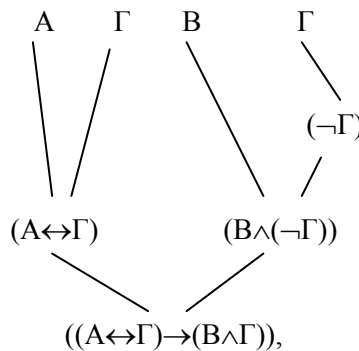
$$\ell(((\neg(\neg(\neg A))) \rightarrow A)) = 4.$$

Η διαδικασία κατασκευής μιας οποιασδήποτε πρότασης (η σύνταξής της) μπορεί να περιγραφεί από ένα διάγραμμα το **συντακτικό δέντρο** της πρότασης που για κάθε πρόταση είναι μοναδικό.

Για παράδειγμα το συντακτικό δέντρο της $((A \leftrightarrow \Gamma) \rightarrow (B \wedge (\neg \Gamma)))$ είναι



Το συντακτικό δέντρο μπορεί να αναπαρασταθεί και:



Σχόλιο για το Συμβολισμό:

Όταν στη κατασκευή μιας πρότασης σ συμμετέχουν κάποιες ατομικές προτάσεις οι A, B, Γ η πρόταση αυτή θα συμβολίζεται ως $\sigma(A, B, \Gamma)$.

Θεώρημα (Αντικατάστασης προτάσεων)

Έστω $\sigma(A_1, A_2, \dots, \rho, \dots, A_n)$ και τ προτάσεις. Τότε και η $\sigma(A_1, A_2, \dots, \tau, \dots, A_n)$ είναι πρόταση.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το θεώρημα αυτό με επαγωγή στο μήκος των προτάσεων.

- i) Εάν η σ είναι προτασιακό σύμβολο, έστω το A , τότε προφανώς το αποτέλεσμα της αντικατάστασης του A από την τ είναι πρόταση η τ .
- ii) (Υπόθεση της Επαγωγής) Έστω $\sigma_1(A_1, A_2, \dots, \rho, \dots, A_n)$ και $\sigma_2(A_1, A_2, \dots, \rho, \dots, A_n)$ δύο προτάσεις για τις οποίες ισχύει το θεώρημα, τότε ισχύει και για τις $(\neg \sigma_1)$, $(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$, $(\sigma_1 \vee \sigma_2)$, $(\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)$ και $(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$.

Πράγματι:

α) Αφού η $\sigma_1(A_1, A_2, \dots, \tau, \dots, A_n)$ είναι πρόταση από την Υ.Ε. άρα και η $(\neg \sigma_1(A_1, A_2, \dots, \tau, \dots, A_n))$ είναι πρόταση σύμφωνα με το ii του Α.Ο.Π..

β) Επίσης αφού οι $\sigma_1(A_1, A_2, \dots, \tau, \dots, A_n)$ και $\sigma_2(A_1, A_2, \dots, \tau, \dots, A_n)$ είναι προτάσεις σύμφωνα με την Υ.Ε. άρα και οι $(\sigma_1(A_1, A_2, \dots, \tau, \dots, A_n) * \sigma_2(A_1, A_2, \dots, \tau, \dots, A_n))$ όπου $*$ $\in \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, είναι προτάσεις σύμφωνα με το ii του Α.Ο.Π..

γ) Η σημασιολογία

Το σύνολο των σημασιών εδώ δεν είναι άλλο από το σύνολο με δυο στοιχεία την αλήθεια (α , ή 1) και το ψέμα (ψ , ή 0). Η σημασιολογική συνάρτηση v , που λέγεται **απονομή αλήθειας**, είναι μια συνάρτηση από το Π στο $\{0, 1\}$:

$$v: \Pi \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\sigma: \vdash v(\sigma)$$

που περιγράφεται από τον πίνακα αλήθειας ή αληθπίνακα:

σ	τ	$\neg \sigma$	$\sigma \wedge \tau$	$\sigma \vee \tau$	$\sigma \rightarrow \tau$	$\sigma \leftrightarrow \tau$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Ορισμός:

Έστω μια πρόταση $\sigma(A_1, A_2, \dots, A_n)$. Η διατεταγμένη n -άδα $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ από αληθοτιμές ($\varepsilon_i \in \{1, 0\}$) ονομάζεται **απονομή τιμών** στα προτασιακά σύμβολα της σ .

Σχόλιο: Για την απλούστευση της γραφής εγκαταλείπουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις. Θεωρούμε ότι η άρνηση $\neg$ έχει προτεραιότητα ως προς όλους τους άλλους συνδέσμους ενώ οι σύνδεσμοι $\wedge$ και $\vee$ έχουν προτεραιότητα ως προς τους άλλους δύο διμελείς συνδέσμους $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$. Κατά συνέπεια η πρόταση $A \wedge B \rightarrow \Gamma$ είναι η $((A \wedge B) \rightarrow \Gamma)$ και όχι η $(A \wedge (B \rightarrow \Gamma))$, καθώς και η $A \vee B \leftrightarrow \Gamma \wedge A$ είναι η $((A \vee B) \leftrightarrow (\Gamma \wedge A))$ και όχι η $(A \vee (B \leftrightarrow (\Gamma \wedge A)))$, ούτε η $(A \vee (B \leftrightarrow \Gamma) \wedge A)$ κτλ..

Παράδειγμα: Θα κατασκευάσουμε τώρα τον αληθοπίνακα των προτάσεων

$$(\neg A \wedge B) \rightarrow A \text{ και } \neg B \wedge ((A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B)).$$

Οι συμβαλλόμενες προτάσεις είναι: $A, B, \neg A, (\neg A \wedge B)$, και $A, B, \neg B, (A \vee \neg B), (A \wedge B)$ αντίστοιχα. Για συντομία θα κατασκευάσουμε και τους δύο αληθοπίνακες σε ένα:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge B$	$A \vee \neg B$	$A \wedge B$	$(A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B)$	$(\neg A \wedge B) \rightarrow A$	$\neg B \wedge ((A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B))$
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	1	0

Ορισμοί:

- Αν μια εκτίμηση αλήθειας (ή μια απονομή τιμών στα προτασιακά σύμβολα μιας πρότασης) κάνει την πρόταση αληθινή, τότε λέμε ότι η συγκεκριμένη εκτίμηση αλήθειας **επαληθεύει** την πρόταση, ενώ όταν την κάνει ψευδή λέμε ότι την **διαψεύδει**.
- Αν για μια πρόταση υπάρχει μια εκτίμηση αλήθειας που την επαληθεύει, τότε η πρόταση λέγεται **επαληθεύσιμη**, ενώ αν για μια πρόταση υπάρχει μια εκτίμηση αλήθειας που την διαψεύδει, τότε η πρόταση λέγεται **διαψεύσιμη**.
- Αν μια πρόταση σ , για κάθε εκτίμηση αλήθειας (ή για κάθε απονομή τιμών στα προτασιακά της σύμβολα) παίρνει την αληθοτιμή 1 λέγεται **λογικά αληθής** ή **ταυτολογία** και συμβολίζεται με $\top$ (Με $\top$ θα συμβολίζουμε και το σύνολο των ταυτολογιών).
- Αν μια πρόταση σ , για κάθε εκτίμηση παίρνει την αληθοτιμή 0 λέγεται **λογικά ψευδής** ή **αντιλογία** και συμβολίζεται με $\perp$ (Με $\perp$ θα συμβολίζουμε και το σύνολο των αντιλογιών).

- ν) Αν μια πρόταση δεν είναι ούτε ταυτολογία, ούτε αντιλογία, λέγεται **ουδέτερη**.
- vi) Δύο προτάσεις σ_1 και σ_2 λέγονται **λογικά ισοδύναμες** αν και μόνο αν, για κάθε εκτίμηση αλήθειας παίρνουν την ίδια αληθοτιμή, (έχουν δηλαδή τον ίδιο πίνακα αλήθειας). Θα χρησιμοποιούμε για τη σχέση αυτή το σύμβολο $\equiv$, δηλαδή γράφουμε: $\sigma_1 \equiv \sigma_2$

Σχόλιο: Στον προηγούμενο αληθοπίνακα έχουμε ότι:

$$(A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B) \equiv B \quad (1)$$

Αν στη σχέση (1) το σύμβολο $\equiv$ αντικατασταθεί από το $\leftrightarrow$ τότε γίνεται πρόταση και μάλιστα ταυτολογία :

$$((A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B)) \leftrightarrow B \quad (2)$$

Η διαφορά των (1) και (2) είναι ότι η (2) είναι μια πρόταση του λογισμού των προτάσεων κατασκευασμένη (γραμμένη) σύμφωνα με τον αναδρομικό ορισμό των προτάσεων, ανήκει δηλαδή στη *γλώσσα* του προτασιακού λογισμού, στη γλώσσα δηλαδή που είναι αντικείμενο της μελέτης μας. Αντίθετα η (1) είναι ένας βολικός συμβολισμός για να συμβολίζουμε το γεγονός ότι οι προτάσεις $((A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B))$ και B είναι λογικά ισοδύναμες. Πρόκειται για μια φράση της γλώσσας που χρησιμοποιούμε για να επικοινωνήσουμε και να συνεννοηθούμε μεταξύ μας, που τη λέμε *μεταγλώσσα*.

1.2 Ιδιότητες των Συνδέσμων (ή Ορισμένες χρήσιμες λογικές ισοδυναμίες)

Οι πέντε λογικοί σύνδεσμοι που δίνονται στο Αλφάβητο της γλώσσας μπορούν να θεωρηθούν ως εσωτερικές στο **Π**. Πράγματι, ο ορισμός των προτάσεων μας εξασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα της πράξης ανήκει στο **Π**, και με βάση το προηγούμενο αληθοπίνακα προσδιορίζουμε μονοσήμαντα την αληθοτιμή της. Έτσι για τις παρακάτω ιδιότητες οι σύνδεσμοι θεωρούνται πράξεις:

1. $\neg\neg A \equiv A$ (ο νόμος της διπλής άρνησης)
2. $A \wedge A \equiv A, A \vee A \equiv A$ (οι $\wedge, \vee$ είναι ταυτοδύναμοι)
3. $A \wedge B \equiv B \wedge A, A \vee B \equiv B \vee A, A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$ (οι $\wedge, \vee$ και $\leftrightarrow$ είναι αντιμεταθετικοί)
4. $(A \wedge B) \wedge \Gamma \equiv A \wedge (B \wedge \Gamma), (A \vee B) \vee \Gamma \equiv A \vee (B \vee \Gamma)$ (προσεταιριστικότητα του $\wedge$ και του $\vee$)
5. $(A \wedge B) \vee \Gamma \equiv (A \vee \Gamma) \wedge (B \vee \Gamma)$ (ο $\vee$ είναι επιμεριστικός ως προς τον $\wedge$)
6. $(A \vee B) \wedge \Gamma \equiv (A \wedge \Gamma) \vee (B \wedge \Gamma)$ (ο $\wedge$ είναι επιμεριστικός ως προς τον $\vee$)
7. $A \wedge (A \vee B) \equiv A, A \vee (A \wedge B) \equiv A$ (απορροφητικοί νόμοι ή απλοποίησης)

8. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (οι νόμοι de Morgan)
9. $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ (έκφραση της συνεπαγωγής από τους $\neg$ και $\vee$)
10. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ (έκφραση της ισοδυναμίας από τους $\rightarrow$ και $\wedge$)
11. $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ (ο νόμος της αντιθετοαντιστροφής)
12. $A \leftrightarrow B \equiv \neg A \leftrightarrow \neg B$
13. $(\neg A \vee A) \equiv \top$
14. $A \rightarrow A \equiv \top$
15. $\neg A \wedge A \equiv \perp$

Σχόλιο: Αν στις παραπάνω εκφράσεις το σύμβολο $\equiv$ αντικατασταθεί από το $\leftrightarrow$, τότε όλες οι εκφράσεις γίνονται προτάσεις και μάλιστα ταυτολογίες.

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε, ως παράδειγμα, την 11 και την 12 και αφήνουμε την απόδειξη των υπολοίπων στον αναγνώστη ως άσκηση.

- α) Για τη 11: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ από την (8)
- $$\equiv B \vee (\neg A)$$
- από την (3)
- $$\equiv \neg(\neg B) \vee (\neg A)$$
- από την (1)
- $$\equiv \neg B \rightarrow \neg A$$
- από την (8)
- β) Για την 12: $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ από την (9)
- $$\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$
- από την (8)
- $$\equiv (B \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B)$$
- από την (3)
- $$\equiv [(\neg(\neg B)) \vee (\neg A)] \wedge [(\neg(\neg A)) \vee (\neg B)]$$
- από την (1)
- $$\equiv [(\neg B) \rightarrow (\neg A)] \wedge [(\neg A) \rightarrow (\neg B)]$$
- από την (8)
- $$\equiv (\neg A) \leftrightarrow (\neg B)$$
- από την (9)

Παράδειγμα: Να απλοποιηθούν οι παρακάτω προτάσεις:

- (i) $(A \rightarrow (B \leftrightarrow \neg A \vee B)) \vee A$
- (ii) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma) \leftrightarrow \Delta$

Λύση

- (i) $(A \rightarrow (B \leftrightarrow \neg A \vee B)) \vee A \equiv \neg A \vee (B \leftrightarrow \neg A \vee B) \vee A$ από (8) και (4)
- $$\equiv (\neg A \vee A) \vee (B \leftrightarrow \neg A \vee B)$$
- από (3) και (4)
- $$\equiv \top \vee (B \leftrightarrow \neg A \vee B) \equiv \top$$
- από την (13)
- (ii) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma) \leftrightarrow \Delta \equiv \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \Gamma)) \vee (\neg A \vee \Gamma) \leftrightarrow \Delta$ από (9)

$$\equiv ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg \Gamma) \vee (\neg A \vee \Gamma)) \leftrightarrow \Delta \quad \text{από (8)}$$

$$\equiv (((A \wedge \neg B) \vee \neg A) \vee ((B \wedge \neg \Gamma) \vee \Gamma)) \leftrightarrow \Delta \quad \text{από (9)}$$

$$\equiv ((A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee (B \vee \neg \Gamma) \wedge (\neg \Gamma \vee \Gamma)) \leftrightarrow \Delta$$

$$\equiv ((T \wedge (\neg B \vee \neg A)) \vee (B \vee \neg \Gamma) \wedge T) \leftrightarrow \Delta$$

$$\equiv ((\neg B \vee \neg A) \vee (B \vee \neg \Gamma)) \leftrightarrow \Delta$$

$$\equiv (\neg B \vee \neg A \vee B \vee \neg \Gamma) \leftrightarrow \Delta$$

$$\equiv T \leftrightarrow \Delta \equiv \Delta$$

Σχόλιο: Είναι φανερό ότι η σχέση $\equiv$ στο Π είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Ακόμα μπορούμε να ορίσουμε στο σύνολο πηλίκων $\Pi/\equiv$ τις πράξεις $\neg_2$, $\wedge_2$ και $\vee_2$, ως εξής:

$\neg_2: \Pi/\equiv \rightarrow \Pi/\equiv$ $\neg_2[\sigma] = [\neg\sigma]$	$\wedge_2: (\Pi/\equiv \times \Pi/\equiv) \rightarrow \Pi/\equiv$ $[\sigma] \wedge_2 [\tau] = [\sigma \wedge \tau]$	$\vee_2: (\Pi/\equiv \times \Pi/\equiv) \rightarrow \Pi/\equiv$ $[\sigma] \vee_2 [\tau] = [\sigma \vee \tau]$
--	--	--

Με τις πράξεις αυτές το $\Pi/\equiv$ είναι μια άλγεβρα Boole, ή πιο χαλαρά το σύνολο των προτάσεων του προτασιακού λογισμού είναι μια άλγεβρα Boole.

Σχόλιο: Από τις σχέσεις (9) και (10) είναι φανερό ότι, σε οποιαδήποτε πρόταση, οι σύνδεσμοι $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$ μπορούν να αντικατασταθούν. Με άλλα λόγια το σύνολο συνδέσμων $\{\neg, \wedge, \vee\}$ είναι ένα επαρκές σύνολο συνδέσμων, και από τους νόμους de Morgan συνάγεται ότι και τα $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$ είναι επαρκή.

Σχόλιο: Τα σύνολα προτάσεων για τα οποία υπάρχει απονομή τιμών που επαληθεύει όλες τις προτάσεις τους τα λέμε **ικανοποιήσιμα**. Κατά τη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων από υποθέσεις (ή από προκείμενες), ή όταν αποδεικνύουμε μια πρόταση μέσα στα πλαίσια μιας θεωρίας, ενδιαφέρον παρουσιάζουν μόνο οι περιπτώσεις που το σύνολο των προκείμενων (υποθέσεων), ή του συνόλου των προτάσεων της θεωρίας, είναι ένα ικανοποιήσιμο σύνολο. Αν δεν είναι ικανοποιήσιμο το σύνολο αυτό, τότε οποιαδήποτε πρόταση μπορεί να αποτελεί συμπέρασμα. Αυτός είναι και ο λόγος που απαιτείται η μη αντιφατικότητα για κάθε επιστημονική θεωρία.

Κατά τη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων, ακολουθούνται κάποια σχήματα τα οποία έχουν εμπειρικά κατακτηθεί από τον άνθρωπο. Οι πρώτοι που εντόπισαν τα σχήματα αυτά ήταν ο Αριστοτέλης (384 με 322 π.Χ.), για αυτά του κατηγορηματικού λογισμού, και ο Χρύσιππος (280 με 206 π.Χ.) για τα σχήματα του προτασιακού λογισμού.

1.3 Συμπερασματικά σχήματα

Ορισμός:

Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων και σ μια πρόταση. Η σ λέγεται **συνέπεια** του Σ (συμβολικά $\Sigma \models \sigma$), αν και μόνο αν κάθε απονομή τιμών που ικανοποιεί το Σ επαληθεύει και τη σ . Το σύνολο των συνεπειών ενός συνόλου Σ συμβολίζεται $\text{Συν}(\Sigma)$. Δηλαδή:

$$\text{Συν}(\Sigma) = \{\tau / \Sigma \models \tau\}$$

Θεώρημα (Θεώρημα του Χρύσιππου)

Έστω $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ προτάσεις: $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \models \sigma$ αν και μόνο αν $\models \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \dots \wedge \sigma_n \rightarrow \sigma$

Ορισμένα συμπερασματικά σχήματα που συνήθως συναντάμε είναι τα εξής :

Όνομα	Μορφή	Παράδειγμα
Σ1) Modus Ponens	$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}$	$\frac{\text{αν είναι μέρα τότε έχει φως} \quad \text{είναι μέρα}}{\text{έχει φως}}$
Σ2) Modus Tollens	$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \neg \beta}{\neg \alpha}$	$\frac{\text{αν είναι μέρα τότε έχει φως} \quad \text{Δεν έχει φως}}{\text{Δεν είναι μέρα}}$
Σ3) Υποθετικός Συλλογισμός	$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$	$\frac{\text{αν είναι μέρα τότε έχει φως} \quad \text{αν έχει φως τότε ο Σωκράτης περιπατεί}}{\text{αν είναι μέρα τότε ο Σωκράτης περιπατεί}}$
Σ4) Διαζευκτικός Συλλογισμός	$\frac{\alpha \vee \beta \quad \neg \alpha}{\beta}$	$\frac{\text{είναι νύχτα ή έχουμε έκλειψη ηλίου} \quad \text{Δεν είναι νύχτα}}{\text{έχουμε έκλειψη ηλίου}}$
Σ5) Απλοποίηση	$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$	$\frac{\text{είναι νύχτα και έχουμε έκλειψη ηλίου}}{\text{είναι νύχτα}}$
Σ6) Σύζευξη	$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$	$\frac{\text{είναι μέρα} \quad \text{πέφτει δυνατή βροχή}}{\text{είναι μέρα και πέφτει δυνατή βροχή}}$
Σ7) Πρόσθεση	$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$	$\frac{\text{είναι μέρα}}{\text{είναι μέρα ή το φεγγάρι λάμπει δυνατά}}$

Αξιοποιώντας το θεώρημα του Χρύσιππου, τα παραπάνω σχήματα μπορούν να γραφούν ως και εξής:

Σ1) Modus Ponens: $\{ \alpha \rightarrow \beta, \alpha \} \models \beta$

Σ2) Modus Tollens: $\{ \alpha \rightarrow \beta, \neg \beta \} \models \neg \alpha$

Σ3) Υποθετικός Συλλογισμός: $\{ \alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \} \models \alpha \rightarrow \gamma$

Σ4) Διαζευκτικός Συλλογισμός: $\{ \alpha \vee \beta, \neg \alpha \} \models \beta$

Σ5) Απλοποίηση: $\{ \alpha \wedge \beta \} \models \alpha$

Σ6) Σύζευξη: $\{ \alpha, \beta \} \models \alpha \wedge \beta$

Σ7) Πρόσθεση: $\{ \alpha \} \models \alpha \vee \beta$

Με τη βοήθεια των επτά αυτών σχημάτων είναι δυνατόν να ελέγχονται επιχειρήματα ως προς την ορθότητά τους. Τα βήματα της διαδικασίας αυτής έχουν ως εξής:

- 1) Εντοπίζουμε τις ατομικές προτάσεις και τις συμβολίζουμε με προτασιακές μεταβλητές.
- 2) Εντοπίζουμε τους λογικούς συνδέσμους σε κάθε σύνθετη πρόταση του κειμένου γράφουμε μια αντίστοιχη στη γλώσσα του προτασιακού λογισμού.
- 3) Καταστρώνουμε το συμπερασματικό σχήμα εντοπίζοντας τις προκείμενες και το συμπέρασμα.
- 4) Μετασχηματίζουμε το σύνολο των προκείμενων με τη βοήθεια των συμπάρω-
σματικών σχημάτων και άλλων ενδεχομένως ταυτολογιών, μέχρι να φτάσουμε στο
συμπέρασμα.

Παράδειγμα: Στο διάλογο Παρμενίδης ο Πλάτωνας εκθέτει ένα επιχείρημα υπέρ της άποψης ότι τα αισθητά (δηλαδή υλικά) πράγματα δεν μετέχουν των ιδεών, ως εξής:

«Εάν τα αισθητά μετέχουν στις ιδέες, τότε είτε ολόκληρη η ιδέα αφομοιώνεται από τα αισθητά είτε ένα μέρος αυτής. Και εάν ένα μέρος της ιδέας αφομοιώνεται, τότε η ιδέα διαιρείται. Εάν ολόκληρη η ιδέα αφομοιώνεται τότε τα τότε η ιδέα αφήνει την υπόστασή της. Αλλά οι ιδέες ούτε διαιρούνται ούτε αφήνουν την υπόστασή τους. Άρα τα αισθητά δεν μετέχουν στις ιδέες.»

Εντοπίζουμε τις ατομικές προτάσεις:

τα αισθητά μετέχουν στις ιδέες: Α

ολόκληρη η ιδέα αφομοιώνεται από τα αισθητά: Β

ένα μέρος αυτής αφομοιώνεται από τα αισθητά: Γ

η ιδέα διαιρείται: Δ

η ιδέα αφήνει την υπόστασή της: E

Εντοπίζουμε τους λογικούς συνδέσμους και καταγράφουμε τις σύνθετες προτάσεις:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \vee \Gamma \\ \Gamma \rightarrow \Delta \\ B \rightarrow E \\ \hline \neg \Delta \wedge \neg E \\ \hline \neg A \end{array}$$

Ελέγχουμε το σχήμα: Αξιοποιώντας το νόμο της αντιθετοαντιστροφής, το σχήμα γίνεται:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \vee \Gamma \\ \neg \Delta \rightarrow \neg \Gamma \quad \text{όμως} \quad \frac{\neg \Delta \wedge \neg E}{\neg \Delta} \quad \text{και} \quad \frac{\neg \Delta \wedge \neg E}{\neg E} \quad \text{οπότε} \quad \frac{\neg \Delta}{\neg \Gamma} \quad \text{και} \quad \frac{\neg E}{\neg B} \\ \neg E \rightarrow \neg B \\ \hline \neg \Delta \wedge \neg E \\ \hline \neg A \end{array}$$

Τα δύο τελευταία δίνουν $(\neg B \wedge \neg \Gamma)$ άρα το σχήμα, αν εφαρμόσουμε αντιθετοαντιστροφή στη πρώτη πρόταση γίνεται:

$$\begin{array}{c} (\neg B \wedge \neg \Gamma) \rightarrow \neg A \\ \hline (\neg B \wedge \neg \Gamma) \\ \hline \neg A \end{array}$$

Που είναι το Σ1 (Modus Ponens). Άρα το επιχείρημα είναι ορθό.

1.4 Ασκήσεις

1) Στις ιδιότητες των λογικών συνδέσμων που δίνονται στην παράγραφο 1.2, αντικαταστήστε το σύμβολο $\equiv$ από το $\leftrightarrow$ και αποδείξτε ότι όλες οι προτάσεις που προκύπτουν είναι ταυτολογίες.

2) Εξετάστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις και απαντήστε αν είναι ταυτολογία αντιλογία ή ουδέτερη.

- | | |
|---|--|
| i) $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$ | v) $(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \wedge \neg B)$ |
| ii) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$ | vi) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ |
| iii) $(A \vee B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$ | vii) $(A \vee (\neg A \wedge B)) \leftrightarrow (A \vee B)$ |
| iv) $(A \wedge (\neg A \vee B)) \leftrightarrow A$ | |

3) Εξετάστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις και απαντήστε αν είναι ταυτολογία αντιλογία ή ουδέτερη.

- $A_1 \vee (A_2 \vee (A_3 \vee (\dots A_n))) \equiv (A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \dots A_n)$
- $A_1 \wedge (A_2 \wedge (A_3 \wedge (\dots A_n))) \equiv (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \dots A_n)$
- $(A \rightarrow B) \rightarrow \Gamma \equiv A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma)$ (είναι προσεταιριστική η $\rightarrow$ ως πράξη;)
- $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \Gamma \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow \Gamma)$ (είναι προσεταιριστική η $\leftrightarrow$ ως πράξη;)

4. Δείξτε, με όλους τους δυνατούς τρόπους που διαθέτετε, ότι η παρακάτω προτάσεις είναι

Ταυτολογίες:

- | | |
|---|---|
| i) $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$ | viii) $\neg A \rightarrow (\neg B \leftrightarrow (B \rightarrow A))$ |
| ii) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$ | ix) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ |
| iii) $(A \vee B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$ | x) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ |
| iv) $(A \wedge (A \vee B)) \leftrightarrow A$ | xi) $A \vee (A \rightarrow B)$ |
| v) $(A \vee (A \wedge B)) \leftrightarrow A$ | xii) $(A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow B)$ |
| vi) $(A \vee (\neg A \wedge B)) \leftrightarrow (A \vee B)$ | xiii) $(A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow B)$ |
| vii) $(A \wedge (\neg A \vee B)) \leftrightarrow (A \wedge B)$ | |

5. Εξετάστε ποιος λογικός σύνδεσμος είναι κριμένος στη φράση:

«Αν ένας αριθμός είναι άρτιος και το τετράγωνό του είναι άρτιο, αν δεν είναι ούτε το τετράγωνο του είναι»

6. Δίδονται οι εκφωνήσεις δύο αποφάνσεων ως εξής:

A: Αν οι διχοτόμοι δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

B: Αν ένα τρίγωνο δεν είναι ισοσκελές, τότε δεν διαθέτει ίσες διχοτόμους δύο γωνιών του.

- Βλέπετε κάποια σχέση μεταξύ των δύο αυτών διατυπώσεων;
- Αποτελούν οι δύο αποφάνσεις διατυπώσεις ισοδύναμων θεωρημάτων; (αν δηλαδή αποδείξουμε το ένα έχουμε και την απόδειξη του άλλου;)

7. Δίδεται η εκφώνηση:

A: Εάν η μία από τις βάσεις ενός τραπέζιου είναι διπλάσια της άλλης, τότε η διάμεσός του τριχοτομείται από τις διαγωνίες του.

- Ακολουθώντας τον κανόνα που έχετε διαπιστώσει στην προηγούμενη άσκηση (6) διατυπώστε την εκφώνηση που αντιστοιχεί στο B.
- Αποδείξτε το θεώρημα και στις δύο εκδοχές τους και καταγράψτε τα μεθοδολογικά σας συμπεράσματα.

8. Δίδεται η εκφώνηση:

A: Αν ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, τότε οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, αν δεν είναι εγγράψιμο τότε οι απέναντι γωνίες του δεν είναι παραπληρωματικές.

- Αναδιατυπώστε αυτή την εκφώνηση σε μια όσο το δυνατόν πιο κομψή (συνεπτυγμένη) μορφή.
- Βρείτε μια άλλη διατύπωση σύμφωνα με τη λογική ισοδυναμία: $A \leftrightarrow B \equiv \neg A \leftrightarrow \neg B$

9. Ελέγξτε, ως προς την ορθότητά τους παρακάτω συλλογισμούς:

- Εάν ένας αριθμός είναι άρτιος, τότε και το τετράγωνό του είναι άρτιο. Ένας αριθμός είναι ή άρτιος ή περιττός. Το τετράγωνο του α δεν είναι άρτιος. Άρα ο α είναι περιττός.

- ii. *Εάν η τιμή των μετοχών του πετρελαίου πέσει ή οι πετρελαϊκές επιχειρήσεις αποτύχουν, τότε ο Γιώργος ή θα πτωχεύσει ή θα αυτοκτονήσει. Εάν οι πετρελαϊκές επιχειρήσεις αποτύχουν ή ο Γιώργος πτωχεύσει, τότε θα υπάρξει δικαστική δίωξη. Δεν θα υπάρξει δικαστική δίωξη. Η τιμή των μετοχών του πετρελαίου θα πέσει. Άρα ο Γιώργος θα αυτοκτονήσει.*
- iii. *Αν διαβάζεις αυτό το βιβλίο, τότε αν το βιβλίο συμφωνεί με την Αγία Γραφή, χάνεις τον χρόνο σου. Αν διαβάζεις αυτό το βιβλίο, τότε εάν το βιβλίο δε συμφωνεί με την Αγία Γραφή, αμαρτάνεις. Αν χάνεις το χρόνο σου, τότε αμαρτάνεις. Άρα αν διαβάζεις αυτό το βιβλίο, τότε αμαρτάνεις.*
- iv. *Αν η αγάπη είναι τυφλή τότε ο δικαστικός είναι πληρωμένος. Όμως η αγάπη είναι τυφλή ή ο κυβερνήτης λέει ψέματα. Αν αληθεύει ότι δικαστικός είναι πληρωμένος. Άρα ο κυβερνήτης λέει ψέματα*
- v. *Εάν δεν αποκαλυφθεί το έγκλημα φταίει ο ανακριτής. Εάν φταίει ο ανακριτής, πρέπει να απαλλαγεί από τα καθήκοντά του. Άρα εάν αποκαλυφθεί το έγκλημα, ο ανακριτής δεν πρέπει να απαλλαγεί από τα καθήκοντά του.*
- vi. *Αποδείξτε ότι: α) $\{A \vee B, B \rightarrow \Gamma, \neg \Gamma\} \models A$, β) $\{A \rightarrow B \vee \Gamma, \neg \Gamma\} \models A \rightarrow B$*

3 Κατηγορηματικός λογισμός

3.1 Γλώσσα του κατηγορικού λογισμού

Το αλφάβητο

Τρία είδη συμβόλων αποτελούν το αλφάβητο της γλώσσας του κατηγορικού λογισμού:

- i) Τα λογικά σύμβολα:
 - α) Τα σύμβολα μεταβλητών $x, y, z, \dots, x_1, y_1, z_1, \dots, x_2, \dots$
 - β) Τα σύμβολα των λογικών συνδέσμων, $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
 - γ) Τα σύμβολα για τον καθολικό και για τον υπαρξιακό ποσοδείκτη: $\forall$, και $\exists$.
 - δ) Τα σύμβολα, παρένθεση που ανοίγει παρένθεση που κλείνει και το κόμμα, για την στίξη: $(,), ,$.
- ii) Τα μη λογικά σύμβολα:
 - α) Τα σύμβολα κατηγορημάτων: $P, Q, R, \dots P_1, Q_1, R_1, \dots P_2, Q_2, R_2, \dots$
 - β) Τα σύμβολα των συναρτήσεων: $f, g, h, \dots f_1, h_1, g_1, \dots, f_2, h_2, g_2, \dots$
 - γ) Τα σύμβολα σταθερών: $a, b, c, \dots a_1, b_1, c_1, \dots, a_2, b_2, c_2, \dots$

Η σύνταξη [ή αναδρομικός ορισμός των όρων και των τύπων]

Οι συντακτικοί κανόνες της γλώσσας του κατηγορηματικού λογισμού παράγουν δύο κατηγορίες από **φράσεις** Φ , τους **όρους** και τους **τύπους**. Το σύνολο των όρων θα το συμβολίζουμε με O και το σύνολο των τύπων με T . Δηλαδή $\Phi = O \cup T$

- i) **Ορισμός των όρων:**
 - O_1) Τα σύμβολα **μεταβλητών** και τα σύμβολα **σταθερών** είναι όροι.
 - O_2) Εάν f είναι ένα σύμβολο συνάρτησης n μεταβλητών (ή θέσεων) και $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι όροι, τότε και η ακολουθία $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ είναι όρος.
- ii) **Ορισμός των τύπων:**
 - T_0) Ονομάζουμε **ατομικό τύπο** (ή απλά **άτομο**) κάθε ακολουθία της μορφής $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, όπου P είναι ένα σύμβολο κατηγορήματος n θέσεων και $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι όροι.
 - T_1) Οι ατομικοί τύποι είναι τύποι.
 - T_2) Αν ϕ και ρ είναι τύποι τότε τύποι είναι και οι ακολουθίες:

$$(\neg\phi), (\phi\wedge\rho), (\phi\vee\rho), (\phi\rightarrow\rho), (\phi\leftrightarrow\rho)$$
 - T_3) Αν x είναι ένα σύμβολο μεταβλητής και ϕ ένας τύπος, τότε τύπος είναι και η ακολουθία $\forall x, \phi$ και $\exists x, \phi$ (ή $(\forall x)\phi$ και $(\exists x)\phi$).
 - T_4) Τύποι είναι μόνο ό,τι παράγεται από τους T_1, T_2 και T_3 .

Η σημασιολογία

Όπως είπαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, μια γλώσσα διαμορφώνεται ιστορικά κάτω από την ανάγκη της επικοινωνίας. Η γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων δεν ξεφεύγει από αυτό το κανόνα. Ο σκοπός τον οποίο υπηρετεί δεν είναι άλλος από το να αποτελέσει εργαλείο, επικοινωνία, στοχασμού και βεβαίως διατύπωσης, των μαθηματικών θεωριών.

Έτσι από τις δύο κατηγορίες από φράσεις διαθέτει, οι μεν **όροι** είναι κατάλληλοι για να αποτελέσουν ονόματα κάποιων αντικειμένων, σταθερών ή μεταβλητών, και οι **τύποι** είναι κατάλληλοι για να δηλώσουν κάποιες ιδιότητες, γενικά κάποια μαθηματικά γεγονότα, πραγματοποιούμενα ή όχι.

Το πρόβλημα λοιπόν της σημασιολογίας της γλώσσας του λογισμού των κατηγορημάτων, καθώς και το πρόβλημα της αλήθειας, τίθενται με εντελώς διαφορετικούς όρους απ' ότι στον προτασιακό λογισμό.

- Οι όροι θα αποτελέσουν τα ονόματα των μαθηματικών αντικειμένων με τα οποία ασχολείται η θεωρία την οποία διατυπώνουμε. Τα ονόματα δηλαδή των στοιχείων του σύμπαντος στο οποίο αναφέρεται θεωρία
- Οι τύποι αποτελούν τις (αποφαντικές) φράσεις οι οποίες δηλώνουν τα μαθηματικά γεγονότα που συμβαίνουν, ή όχι, στο σύμπαν της θεωρίας.

Το σύστημα αυτό δεν αποτελεί γλώσσα, παραμένει ένα τυπικό σύστημα χωρίς εκφραστικές δυνατότητες, αν δεν συμπληρωθεί με ένα σύστημα σημασιολογικών κανόνων. Με άλλα λόγια αν δεν αποδοθεί σημασία στα μη λογικά της σύμβολα, γιατί τα λογικά σύμβολα διατηρούν τη σημασία που έχουν στον προτασιακό λογισμό. Η σημασία αυτή εξαρτάται από τη μαθηματική δομή η οποία χρειάζεται να περιγραφεί και να μελετηθεί. Με τον ορισμό του συστήματος των σημασιολογικών κανόνων το σύνολο των όρων ***O*** θα γίνει το σύνολο των ονομάτων των μαθηματικών αντικειμένων που αποτελούν το βασικό σύνολο της δομής, ενώ το σύνολο ***T*** θα είναι το σύνολο των φράσεων που θα εκφράζουν τα μαθηματικά γεγονότα που συμβαίνουν ή όχι στη συγκεκριμένη δομή. Το σύνολο ***O*** είναι ελάχιστο από συντακτική μόνο σκοπιά. Οι φράσεις της μορφής $t_1 = t_2$ με $t_1, t_2 \in \mathbf{O}$ δηλώνουν ότι οι όροι t_1, t_2 αποτελούν διαφορετικά ονόματα για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο.

Ας δούμε κάποια παραδείγματα από τη γλώσσα των φυσικών αριθμών:

Ας υποθέσουμε ότι τα σύμβολα μεταβλητών $x, y, z, \dots$ συμβολίζουν φυσικούς αριθμούς, ότι τα σύμβολα συναρτήσεων $+$, $\times$, είναι οι γνωστές μας πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, ενώ τα σύμβολα των κατηγορημάτων $=$ και $\leq$ είναι οι γνωστές μας σχέσεις της ισότητας και της διάταξης αντίστοιχα. Επίσης τα σύμβολα σταθερών $0, 1, 2, 3, \dots$ αποτελούν τα ονόματα των στοιχείων του $\mathbb{N}$.

Με αυτό το περιεχόμενο των συμβόλων οι παρακάτω ακολουθίες είναι όροι που αποτελούν ονόματα στοιχείων του $\mathbb{N}$, σταθερών ή μεταβλητών: x , $x \times y$, (ή xy), $x+2y$, $x(2y+3z)$, $0(x+12y)$, $23(z+y)+2(x+3y^{13})$, x^2+y^2 , $(x^2)^3$ κτλ. Ο $2x^2$ είναι ο x υψωμένος στο τετράγωνο και πολλαπλασιασμένος με το 2 ενώ ο $(2x)^2$ είναι ο x πολλαπλασιασμένος με το 2 και υψωμένος στο τετράγωνο.

Οι παρακάτω ακολουθίες είναι τύποι:

1. $x = y$
2. $x \leq 13$
3. $(\forall x)[x \leq 13]$
4. $(\exists x)[x \leq 13]$
5. $x(2y+z) \leq 1$
6. $(\exists z)[x(2y+z) \leq 1]$
7. $(\forall x)[0 \leq x]$
8. $(\exists x)[x \leq 0]$
9. $(\exists x)[3x+1=7]$,
10. $(\forall x)[3x+1=7]$,
11. $(\forall x)[x \leq x]$,
12. $(\forall x)(\forall y)[(x < y) \vee (y < x) \vee (x=y)]$,
13. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x \leq y) \wedge (y \leq z) \rightarrow (x \leq z)]$

Ο τύπος (1) λέει ότι τα σύμβολα μεταβλητών x και y αποτελούν δύο διαφορετικά ονόματα για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο, που εδώ είναι ένας φυσικός αριθμός. Δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι αλήθεια ή όχι.

Ο (2) λέει ότι ο x είναι μικρότερος από τον 13. Δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι αλήθεια ή όχι, είναι άγνωστο αν η x δεν πάρει συγκεκριμένη τιμή.

Ο (3) λέει ότι όλοι οι αριθμοί είναι μικρότεροι από τον 13, που είναι ψέμα.

Ο (4) λέει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας φυσικός αριθμός μικρότερος από τον 13, που είναι αλήθεια.

Ο (5) ότι $x=0$, ή $x=1$ και $y=0$ και $z=1$, ή $x=1$ και $y=0$ και $z=0$. Άγνωστο.

Για τον (6) επίσης δεν μπορούμε να απαντήσουμε αν δεν πάρουν τιμές το x και το y .

Ο (7) ότι όλοι οι αριθμοί είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι με το 0. Αλήθεια.

Ο (8) ότι υπάρχει φυσικός αριθμός μικρότερος ή ίσος με το 0, που είναι αλήθεια, είναι το 0.

Η (9) ότι η εξίσωση $3x+1=7$ έχει λύση στους φυσικούς αριθμούς, που είναι αλήθεια.

Η (10) ότι η εξίσωση $3x+1=7$ είναι αόριστη στους φυσικούς αριθμούς, που είναι ψέμα.

Η (11) ότι η σχέση $\leq$ είναι αυτοπαθητική.

Η (12) ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι συγκρίσιμοι μεταξύ τους.

Η (13) ότι η σχέση $\leq$ είναι μεταβατική.

Ας δούμε ακόμα κάποια παραδείγματα από την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Εισάγουμε τα σύμβολα κατηγορημάτων μιας θέσης:

$\Sigma(x) \equiv$ «Το x είναι σημείο»

$E(x) \equiv$ «Το x είναι ευθεία»

και τα σύμβολα κατηγορημάτων δύο θέσεων:

$\Pi(x,y) \equiv$ «η x είναι παράλληλη στην y »

$K(x,y) \equiv$ «η x είναι κάθετη στην y »

Τα κατηγορήματα δύο θέσεων πληρούν τις παρακάτω ιδιότητες:

$$12. (\forall x)[E(x) \rightarrow \Pi(x,x)]$$

$$13. (\forall x)(\forall y)[E(x) \wedge E(y) \rightarrow (\Pi(x,y) \rightarrow \Pi(y,x))]$$

$$14. (\forall x)(\forall y)(\forall z)[E(x) \wedge E(y) \wedge E(z) \rightarrow (\Pi(x,y) \wedge \Pi(y,z) \rightarrow \Pi(x,z))]$$

Αν συμφωνήσουμε ότι τα x, y, z συμβολίζουν ευθείες τότε η γραφή απλουστεύεται ως εξής:

$$15. (\forall x)[\Pi(x,x)]$$

$$16. (\forall x)(\forall y)[\Pi(x,y) \rightarrow \Pi(y,x)]$$

$$17. (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\Pi(x,y) \wedge \Pi(y,z) \rightarrow \Pi(x,z)]$$

Με τους τύπους αυτούς αληθείς η σχέση που συμβολίζεται από το κατηγορήμα δύο θέσεων Π δηλώνει τη γνωστή μας παραλληλία που είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Ανάλογα για το K , αν οι παρακάτω τύποι δηλώνουν κάτι το αληθές

$$18. (\forall x)[\neg K(x,x)]$$

$$19. (\forall x)(\forall y)[K(x,y) \rightarrow K(y,x)]$$

$$20. (\forall x)(\forall y)(\forall z)[K(x,z) \wedge K(y,z) \rightarrow \Pi(x,y)]$$

τότε το κατηγορήμα δύο θέσεων K δηλώνει τη γνωστή μας σχέση της καθετότητας.

Πράγματι η (1) λέει ότι η K είναι αντισυμμετρική σχέση, η (2) ότι είναι συμμετρική, ενώ η (3) αποτελεί διατύπωση σε τυπική γλώσσα (είναι συνώνυμη) του γνωστού μας θεωρήματος «αν δύο ευθείες είναι κάθετες σε μια οποιαδήποτε τρίτη τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες».

Επίσης η

$$21. (\forall x)(\forall y)[\Sigma(x) \wedge E(y) \wedge x \notin y \rightarrow (\exists z)[E(z) \wedge x \in z \wedge \Pi(y, z)]]$$

είναι συνώνυμη της «Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μια μόνο παράλληλος προς την ευθεία αυτή»

3.2 Ελεύθερες και δεσμευμένες μεταβλητές

Ορισμός

Ονομάζουμε **εμφάνιση** μιας μεταβλητής x σε μια φράση Φ , κάθε θέση της Φ κατειλημμένη από τη μεταβλητή x , εκτός από αυτές που έπονται των συμβόλων ποσοδεικτών $\forall$ και $\exists$.

Για παράδειγμα η x στον 18 έχει δύο εμφανίσεις, στον 21 έχει 3 και στους 4, 5, 6, 7, και 8 έχει μία.

Ορισμός

Ορίζουμε τις **ελεύθερες εμφανίσεις** μιας μεταβλητής x μέσα σε ένα τύπο T ακολουθώντας τον ορισμό των τύπων:

- Όλες οι εμφανίσεις της x μέσα σε έναν ατομικό τύπο είναι ελεύθερες.
- Οι ελεύθερες εμφανίσεις της x στον τύπο $\neg \varphi$, είναι αυτές της x στον φ .
- Οι ελεύθερες εμφανίσεις της x στους $\varphi \wedge \rho$, $\varphi \vee \rho$, $\varphi \rightarrow \rho$ και $\varphi \leftrightarrow \rho$, είναι αυτές της x στους φ και ρ .
- Οι ελεύθερες εμφανίσεις της x στον τύπο $(\forall y)\varphi$ και στον $(\exists y)\varphi$, (με $x \neq y$) είναι αυτές της x στον φ .
- Η x δεν έχει καμιά ελεύθερη εμφάνιση στους $(\forall x)\varphi$ και $(\exists x)\varphi$

Μια εμφάνιση που δεν είναι ελεύθερη λέγεται **δεσμευμένη**.

Παράδειγμα

Στον $(\forall y)[\Sigma(x) \wedge E(y) \wedge x \notin y \rightarrow (\exists z)[E(z) \wedge x \in z \wedge \Pi(y, z)]]$ η x διαθέτει 3 ελεύθερες εμφανίσεις ενώ οι y και z καμιά.

Ορισμός

Μια μεταβλητή λέγεται **ελεύθερη** σε μια φράση αν έχει μια τουλάχιστον ελεύθερη εμφάνιση. Αν όλες οι εμφανίσεις είναι δεσμευμένες η μεταβλητή λέγεται **δεσμευμένη**.

Σχόλιο

Από το T_3 του ορισμού των τύπων συνάγεται ότι οι δύο ποσοδείκτες, ο καθολικός $\forall$ και ο υπαρξιακός $\exists$, δεν εμφανίζονται ποτέ μόνοι τους αλλά μέσα στα συντάγματα $\forall x$ και $\exists x$, τα οποία ακολουθούνται πάντα από κάποιο τύπο: $(\forall x)\varphi$ και $(\exists x)\varphi$. Ο τύπος αυτός πάνω στον

οποίο εφαρμόζεται τα συντάγματα $\forall x$ και $\exists x$, ως λογικογλωσσικοί τελεστές, λέγεται **πεδίο** (επιρροής, δράσης) ή **εμβέλεια** του $\forall x$ και $\exists x$ αντίστοιχα.

Στις παρακάτω φράσεις τα υπογραμμισμένα μέρη είναι τα πεδία των ποσοδεικτών:

$(\forall x)[\underline{3x+1=7}]$ (Πεδίο του $(\forall x)$)

$(\forall x)[\underline{x \leq x}]$ (Πεδίο του $(\forall x)$)

$(\forall x)(\forall y)[\underline{(x < y) \vee (y < x) \vee (x = y)}]$ (Πεδίο του $(\forall y)$)

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[\underline{(x \leq y) \wedge (y \leq z) \rightarrow (x \leq z)}]$ (Πεδίο του $(\forall z)$)

$(\forall x)(\forall y)[\Sigma(x) \wedge E(y) \wedge x \neq y \rightarrow (\exists z)[\underline{E(z) \wedge x \in z \wedge \Pi(y, z)}]]$ (Πεδίο του $(\forall z)$)

Έτσι η εμφάνιση μιας μεταβλητής x σ' ένα τύπο είναι δεσμευμένη μόνο στην περίπτωση που η μεταβλητή αυτή είναι μέσα στο πεδίο, ή την εμβέλεια του $\forall x$ ή του $\exists x$.

Ορισμός

Ένας τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές λέγεται **κλειστός τύπος** και είναι **πρόταση**.

Στους παραπάνω τύπους οι 1,2,5 και 6 υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές, κανείς λοιπόν απ' αυτούς δεν είναι πρόταση και γι' αυτό αδυνατούμε να απαντήσουμε αν είναι αλήθεια ή όχι. Αντίθετα στους υπόλοιπους όλες οι μεταβλητές είναι δεσμευμένες. Είναι λοιπόν προτάσεις και γι' αυτό μπορούμε να απαντήσουμε αν αυτό που λέει είναι αλήθεια ή όχι.

Σχόλιο:

Υπάρχουν δύο τρόποι για να απαλλαγεί ένας τύπος από τις ελεύθερες μεταβλητές. Ο ένας είναι να αντικατασταθούν

Σχόλιο

Έστω $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ένας τύπος με τις μεταβλητές $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ελεύθερες. Τότε ο $(\forall x_1) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, καθώς και ο $(\exists x_1) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, είναι κλειστός, δηλαδή μια πρόταση.

Η πράξη αυτή της δέσμευσης των μεταβλητών, μέσω της οποίας περνάμε από την $P(x)$ στην $(\forall x)P(x)$ λέγεται **καθολική ποσόδειξη**, καθώς επίσης αυτή μέσω της οποίας περνάμε στον $(\exists x)P(x)$ λέγεται **υπαρξιακή ποσόδειξη**. Οι ποσοδείξεις λοιπόν είναι πράξεις μονομελείς όπως και η άρνηση, ή μιας θέσης, η οποία καταλαμβάνεται από έναν τύπο.

Ορισμός

Έστω $\mathcal{L}$ μια γλώσσα και $\mathcal{M}$ ένα μοντέλο της. Για κάθε πρόταση $\sigma \in \mathcal{L}$, λέμε ότι η $\mathcal{M}$ αποτελεί **μοντέλο** της ή ότι το $\mathcal{M}$ **επαληθεύει** την πρόταση, αν και μόνο αν $\mathcal{M} \models \sigma$.

Όταν η πρόταση είναι ψευδής μέσα στο μοντέλο (ή την ερμηνεία) ($\mathcal{M} \models \neg \sigma$) λέμε ότι το μοντέλο (ή η ερμηνεία) την **διαψεύδει**.

Ορισμός

Το σύνολο των προτάσεων της $\mathcal{L}$ που έχουν το $\mathcal{M}$ ως μοντέλο, το λέμε θεωρία του $\mathcal{M}$, και το συμβολίζουμε $\Theta(\mathcal{M})$:

$$\Theta(\mathcal{M}) = \{\sigma / \mathcal{M} \models \sigma\}$$

Ορισμός

Μια πρόταση $\sigma \in \mathcal{L}$, λέγεται **λογικά αληθής** (συμβολισμός $\models \sigma$) αν και μόνο αν **επαληθεύεται** από κάθε μοντέλο (ή ερμηνεία) της $\mathcal{L}$.

Ορισμός:

Αν μια πρόταση $\sigma \in \mathcal{L}$ δεν έχει μοντέλο, (ή δεν **επαληθεύεται** από καμιά ερμηνεία) λέγεται **λογικά ψευδής**.

3.3 Χαρακτηριστικές Ιδιότητες στη χρήση των ποσοδεικτών:

1. Η Άρνηση των Ποσοδεικτών (ή Γενικευμένοι νόμοι de Morgan)

$$a) \neg(\forall x)\varphi(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi(x)$$

$$b) \neg(\exists x)\varphi(x) \leftrightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$$

(Κάθε ποσοδείκτης λοιπόν μπορεί να οριστεί από τον άλλο και την άρνηση)

2. Επιμεριστικότητα

$$i) (\forall x)[\varphi(x) \wedge \sigma(x)] \leftrightarrow (\forall x) \varphi(x) \wedge (\forall x) \sigma(x)$$

$$ii) (\exists x)[\varphi(x) \vee \sigma(x)] \leftrightarrow (\exists x) \varphi(x) \vee (\exists x) \sigma(x)$$

$$iii) (\forall x)\varphi(x) \vee (\forall x) \sigma(x) \rightarrow (\forall x)[\varphi(x) \vee \sigma(x)]$$

$$iv) (\exists x)[\varphi(x) \wedge \sigma(x)] \rightarrow (\exists x)\varphi(x) \wedge (\exists x) \sigma(x)$$

3. Οι νόμοι της ανεξαρτησίας των ποσοδεικτών:

$$a) (\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi(x,y)$$

$$b) (\exists x)(\exists y)\varphi(x,y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi(x,y)$$

$$c) (\exists x)(\forall y)\varphi(x,y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)\varphi(x,y)$$

4. Ο κανόνας αντικατάστασης των δεσμευμένων μεταβλητών.

Μπορούμε σ' έναν τύπο φ να αντικαθιστούμε το όνομα μιας δεσμευμένης μεταβλητής x , από κάποιο άλλο, έστω το y , αρκεί αυτό να μην εμφανίζεται στον φ

- a) $(\forall x)\varphi(x) \leftrightarrow (\forall y)\varphi(y)$
 b) $(\exists x)\varphi(x) \leftrightarrow (\exists y)\varphi(y)$

5) Για οποιονδήποτε τύπους φ και σ αν στον σ η μεταβλητή x δεν είναι ελεύθερη:

- a) $(\forall x)[\varphi(x) \vee \sigma] \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \vee \sigma$
 b) $(\forall x)[\varphi(x) \wedge \sigma] \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge \sigma$
 c) $(\exists x)[\varphi(x) \vee \sigma] \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \vee \sigma$
 d) $(\exists x)[\varphi(x) \wedge \sigma] \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \wedge \sigma$
 e) $(\forall x)[\sigma \rightarrow \varphi(x)] \leftrightarrow (\sigma \rightarrow (\forall x)\varphi(x))$
 f) $(\exists x)[\sigma \rightarrow \varphi(x)] \leftrightarrow (\sigma \rightarrow (\exists x)\varphi(x))$
 g) $((\forall x)\varphi(x) \rightarrow \sigma) \leftrightarrow (\exists x)[\varphi(x) \rightarrow \sigma]$
 h) $((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \sigma) \leftrightarrow (\forall x)[\varphi(x) \rightarrow \sigma]$

Παράδειγμα

Θα αποδείξουμε την 5g. Παίρνουμε το πρώτο μέλος και εκτελώντας πράξεις φτάνουμε στο δεύτερο:

$$\begin{aligned} ((\forall x)\varphi(x) \rightarrow \sigma) &\equiv \neg(\forall x)\varphi(x) \vee \sigma \\ &\equiv (\exists x)\neg\varphi(x) \vee \sigma \quad (\text{από τον 1a}) \\ &\equiv (\exists x)[\neg\varphi(x) \vee \sigma] \quad (\text{από τον 5d}) \\ &\equiv (\exists x)[\varphi(x) \rightarrow \sigma] \quad (\text{από την ταυτολογία } (A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B) \end{aligned}$$

3.4 Συμπερασματικά σχήματα στον κατηγορηματικό λογισμό (Συλλογισμοί)

Ο φυσικός συμπερασμός.

Όπως είπαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου 5, τα σχήματα συλλογισμών της μορφής:

$$\begin{array}{c} \text{Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί} \\ \text{Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος} \\ \hline \text{Ο Σωκράτης είναι θνητός} \end{array}$$

και γενικότερα οι συλλογισμοί που μελετήθηκαν από τον Αριστοτέλη, δηλαδή οι συλλογισμοί που περιέχουν προτάσεις του λογισμού των κατηγορημάτων, δεν μπορούν να μελετηθούν στο πλαίσιο των επτά (Σ1,...,Σ7) συμπερασματικών σχημάτων που είδαμε στον προτασιακό λογισμό. Μπορούμε όμως να διευρύνουμε το πλαίσιο αυτό προσθέτοντας λίγους κανόνες οι

οποίοι θα μας επιτρέπουν να απαλείψουμε, ή να εισάγουμε ποσοδείκτες. Για το σκοπό αυτό απαιτούνται δύο κανόνες απαλοιφής ποσοδεικτών: την καθολική συγκεκριμενοποίηση ($\forall$ -συγκεκριμενοποίηση) και την υπαρξιακή συγκεκριμενοποίηση ($\exists$ -συγκεκριμενοποίηση), και δυο κανόνες εισαγωγής ποσοδεικτών ένα για την καθολική ποσόδειξη η καθολική γενίκευση και ένα για την υπαρξιακή γενίκευση:

Η Καθολική Συγκεκριμενοποίηση ($\forall$ -Σ.)

Από την αλήθεια του τύπου $(\forall x)\varphi(x)$ μπορούμε να συμπεράνουμε την αλήθεια του $\varphi(c)$ όπου το c είναι μια συγκεκριμένη σταθερά η οποία έχει αντικαταστήσει όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις του x στον φ . Το πεδίο σημασίας της c είναι το σύνολο των αντικειμένων της θεωρίας για την οποία συζητάμε, δηλαδή το βασικό σύνολο του μοντέλου της γλώσσας.

Το σχήμα γράφεται συμβολικά:

$$\frac{(\forall x)\varphi(x)}{\varphi(c)}$$

Ας εξετάσουμε ως παράδειγμα πως είναι δυνατόν να ελεγχθεί η εγκυρότητα του (6-1).

Εισάγουμε για το σκοπό αυτό τα κατάλληλα σύμβολα κατηγορημάτων:

$A(x)$ για το « O x είναι άνθρωπος»

$\Theta(x)$ για το « O x είναι θνητός»

Οπότε ο (6-1) γράφεται:

$$\frac{(\forall x)[A(x) \rightarrow \Theta(x)]}{\frac{A(\sigma)}{\Theta(\sigma)}}$$

Οπότε:

1. $(\forall x)[A(x) \rightarrow \Theta(x)]$
2. $A(\sigma)$
3. $A(\sigma) \rightarrow \Theta(\sigma)$
4. $\Theta(\sigma)$

Στο 1. έχουμε την πρώτη προκειμένη, στο 2. τη δεύτερη, η 3. συνάγεται από τη 1. με εφαρμογή της καθολικής συγκεκριμενοποίησης, και τελικά η 4. συνάγεται από τις 2. και 3. με εφαρμογή του Modus Ponens ($\Sigma 1$).

Η Καθολική Γενίκευση ($\forall$ -Γ.)

Ας θυμηθούμε την κατακτημένη από την εποχή του Ευκλείδη μεθοδολογία αποδείξεων προτάσεων με καθολική ποσόδειξη, για παράδειγμα την πρόταση ότι κάθε αριθμός έχει πρώτο διαιρέτη. Ο Ευκλείδης θεωρεί ότι έχει στη διάθεσή του έναν αριθμό τον A , ο οποίος είναι ένας γενικός αντιπρόσωπος, δηλαδή μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μέσα από το σύνολο των αριθμών, και ως αντικείμενο καθορίζεται από τις ιδιότητες που εξ ορισμού έχουν οι αριθμοί και μόνο απ' αυτές. Αναπτύσσει στη συνέχεια ένα συλλογισμό ο οποίος καταλήγει στο συμπέρασμα ότι ο A έχει έναν πρώτο διαιρέτη, και αφού ο A μπορεί να είναι οποιοσδήποτε καταλήγει στο συμπέρασμα πως όλοι έχουν την ιδιότητα αυτή. Η λογική πράξη που πραγματοποιεί στο τελευταίο αυτό βήμα είναι η καθολική γενίκευση. δέχεται δηλαδή, χωρίς να το δηλώνει αναλυτικά, ότι αυτό που αληθεύει για ένα αυθαίρετα επιλεγμένο αντιπρόσωπο από ένα σύνολο αντικειμένων ισχύει για όλα τα αντικείμενα του συνόλου που αναφερόμαστε. Έτσι αν έχουμε ένα τύπο φ με μια ελεύθερη μεταβλητή, και αν συμβολίσουμε με u τον αυθαίρετα επιλεγμένο αντιπρόσωπο, τότε το u συμβολίζει μια εξατομικευμένη σταθερά, συμβολίζει κάποιο c , οπότε ο $\varphi(u)$ είναι ένας τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές δηλαδή μια πρόταση, από την αλήθεια του οποίου συνάγεται η αλήθεια του $(\forall x)\varphi(x)$.

Η Καθολική Γενίκευση ($\forall$ -Γ.) λοιπόν τυποποιείται:

$$\frac{\varphi(u)}{(\forall x)\varphi(x)}$$

Παράδειγμα:

Ας δούμε πως μπορούμε να ελέγξουμε την εγκυρότητα του συλλογισμού:

Όλα τα σκυλιά είναι τετράποδα

Όλα τα τετράποδα είναι θερμόαιμα

Όλα τα σκυλιά είναι θερμόαιμα

Τυποποιούμε πρώτα το συλλογισμό με τα κατάλληλα κατηγορήματα:

$(\forall x)[\Sigma(x) \rightarrow T(x)]$

$(\forall x)[T(x) \rightarrow \Theta(x)]$

$(\forall x)[\Sigma(x) \rightarrow \Theta(x)]$

Οπότε η απόδειξη έχει ως εξής:

- | | |
|--|---------------------------|
| 1. $(\forall x)[\Sigma(x) \rightarrow T(x)]$ | Η πρώτη προκειμένη |
| 2. $(\forall x)[T(x) \rightarrow \Theta(x)]$ | Η δεύτερη προκειμένη |
| 3. $\Sigma(u) \rightarrow T(u)$ | Από την 1 με $\forall$ -Σ |

- | | |
|---|--|
| 4. $T(u) \rightarrow \Theta(u)$ | Από την 2 με $\forall$ - Σ |
| 5. $\Sigma(u) \rightarrow \Theta(u)$ | Από τις 3 και 4 με τον Υποθετικό Συλλογισμό |
| 6. $(\forall x)[\Sigma(x) \rightarrow \Theta(x)]$ | Από την 5 με $\forall$ - Γ , αφού το u είναι οποιοδήποτε. |

Υπαρξιακή Γενίκευση ($\exists$ - Γ)

Αν έχουμε μπροστά μας έναν άσπρο κύκνο, τότε ο ισχυρισμός ότι «υπάρχουν άσπροι κύκνοι» είναι προφανώς αναμφισβήτητος. Η αλήθεια δηλαδή της πρότασης «ο κύκνος αυτός είναι άσπρος» επιτρέπει την υπαρξιακή γενίκευση «υπάρχουν άσπροι κύκνοι». Αν λοιπόν $\varphi(x)$ είναι ένας τύπος με μια ελεύθερη μεταβλητή το x , και c μια σταθερά, τότε από την αλήθεια της πρότασης $\varphi(c)$ συνάγεται η αλήθεια της γενίκευσης $(\exists x)\varphi(x)$. Η Υπαρξιακή Γενίκευση ($\exists$ - Γ) λοιπόν τυποποιείται:

$$\frac{\varphi(c)}{(\exists x)\varphi(x)}$$

Παράδειγμα:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος} \\ \text{Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί} \end{array}}{\text{Υπάρχουν άνθρωποι θνητοί}}$$

με την τυποποίηση έχουμε:

$$\frac{\begin{array}{l} A(\sigma) \\ (\forall x)[A(x) \rightarrow \Theta(x)] \end{array}}{(\exists x)\Theta(x)}$$

Και αποδεικνύεται ως εξής:

- | | |
|--|---|
| 1. $A(\sigma)$ | Η πρώτη προκείμενη με το σ ως σύμβολο σταθεράς |
| 2. $(\forall x)[A(x) \rightarrow \Theta(x)]$ | Η δεύτερη προκείμενη |
| 3. $A(\sigma) \rightarrow \Theta(\sigma)$ | Από τη 2 με $\forall$ - Σ . |
| 4. $\Theta(\sigma)$ | Από τις 1 και 3 με εφαρμογή Μ.Ρ. |
| 5. $(\exists x)\Theta(x)$ | Από την 4 $\exists$ - Γ . |

Η Υπαρξιακή Συγκεκριμενοποίηση ($\exists$ - Σ)

Αν έχουμε μια αληθή πρόταση με υπαρξιακή ποσόδειξη, όπως $(\exists x)\varphi(x)$, τότε είμαστε απολύτως βέβαιοι ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον αντικείμενο το οποίο πληρεί την φ δηλαδή ένα τουλάχιστον σύμβολο σταθεράς w τέτοιο ώστε η $\varphi(w)$ να είναι αληθής, ενώ υπάρχουν και πολλά που δεν την πληρούν. Εδώ όμως χρειάζεται προσοχή να μην ξαναχρησιμοποιήσουμε το σύμβολο σταθεράς w και σε άλλη θέση μέσα στα πλαίσια του ίδιου συλλογισμού. Αν

δηλαδή έχουμε μια ακόμη πρόταση $(\exists x)\psi(x)$ και απαιτείται συγκεκριμενοποίηση της x , δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την w γιατί τίποτα δεν μας εξασφαλίζει ότι και τα δύο κατηγορήματα πληρούνται από το ίδιο αντικείμενο. Ας δούμε ένα παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι συζητάμε για φυσικούς αριθμούς και ότι στα πλαίσια κάποιου συλλογισμού έχουμε τις προτάσεις $(\exists x)A(x)$ (υπάρχουν άρτιοι αριθμοί) και $(\exists x)\Pi(x)$ (υπάρχουν πρώτοι αριθμοί). Αν απαιτηθεί συγκεκριμενοποίηση και χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύμβολο σταθεράς λέγοντας $A(w)$ και $\Pi(w)$ τότε είναι σαν να λέμε $w=2$, γιατί μόνο το 2 ικανοποιεί και τα δύο κατηγορήματα είναι δηλαδή και άρτιος και πρώτος. Για να μην χάσουμε τη γενικότητα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα w_1 και w_2 .

Η Υπαρξιακή Συγκεκριμενοποίηση ($\exists$ - Σ) τυποποιείται:

$$\frac{(\exists x)\varphi(x)}{\varphi(w)}$$

Όπου το w είναι μια νέα κάθε φορά σταθερά.

Παράδειγμα:

Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής της $\exists$ - Σ .

$$\frac{(\exists x)[\varphi(x) \wedge \psi(x)]}{(\exists x)\psi(x) \wedge (\exists x)\varphi(x)}$$

Απόδειξη:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1. $(\exists x)[\varphi(x) \wedge \psi(x)]$ | Η προκείμενη |
| 2. $\varphi(w) \wedge \psi(w)$ | Από τη 1 με $\exists$ - Σ |
| 3. $\varphi(w)$ | Από τη 2 με απλοποίηση ($\Sigma 5$) |
| 4. $(\exists x)\varphi(x)$ | Από την 3 με $\exists$ - Γ |
| 5. $\psi(w)$ | Από τη 2 με απλοποίηση ($\Sigma 5$) |
| 6. $(\exists x)\psi(x)$ | Από την 5 με $\exists$ - Γ |
| 7. $(\exists x)\varphi(x) \wedge (\exists x)\psi(x)$ | Από 4 και 6 με σύζευξη ($\Sigma 6$) |

Πράγματι αν στον (6-8) εφαρμόσουμε το θεώρημα του Χρύσιππου έχουμε ότι η

$$(\exists x)[\varphi(x) \wedge \psi(x)] \rightarrow (\exists x)\psi(x) \wedge (\exists x)\varphi(x)$$

είναι ταυτολογία, πρόκειται για την ιδιότητα 2d της 5.3, γνωρίζουμε δε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή είναι λάθος ότι:

$$\frac{(\exists x)\psi(x) \wedge (\exists x)\varphi(x)}{(\exists x)[\varphi(x) \wedge \psi(x)]}$$

Πράγματι αν επιχειρήσουμε απόδειξη έχουμε:

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1. $(\exists x)\varphi(x) \wedge (\exists x)\psi(x)$ | Η προκείμενη |
| 2. $(\exists x)\varphi(x)$ | Από την 1 με απλοποίηση (Σ5) |
| 3. $\varphi(w_1)$ | Από την 2 με $\exists$ -Σ |
| 4. $(\exists x)\psi(x)$ | Από την 1 με απλοποίηση (Σ5) |
| 5. $\psi(w_2)$ | Από την 2 με $\exists$ -Σ |
| 6. $\psi(w_1) \wedge \varphi(w_2)$ | Από τις 3 και 5 με σύζευξη (Σ6) |

Όμως στην 6 δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε $\exists$ -Γενίκευση και να καταλήξουμε στην επιθυμητή $(\exists x)[\varphi(x) \wedge \psi(x)]$ αφού εν γέννη $w_1 \neq w_2$.

Η Καθολική Συγκεκριμε-νοποίηση ($\forall$ -Σ.)	$\frac{(\forall x)\varphi(x)}{\varphi(c)}$	
Η Καθολική Γενίκευση ($\forall$ -Γ.)	$\frac{\varphi(v)}{(\forall x)\varphi(x)}$	
Υπαρξιακή Γενίκευση ($\exists$ -Γ.)	$\frac{\varphi(c)}{(\exists x)\varphi(x)}$	
Η Υπαρξιακή Συγκεκριμε-νοποίηση ($\exists$ -Σ.)	$\frac{(\exists x)\varphi(x)}{\varphi(w)}$	

Ασκήσεις

- Αποδείξτε πρώτα με πράξεις και μετά με ταμπλό όλες τις χαρακτηριστικές ιδιότητες στη χρήση των ποσοδεικτών, της παραγράφου 6.3.
- Γράψτε στη γλώσσα $\mathcal{L}_a$ της αριθμητικής τύπους συνώνυμους με τις παρακάτω φράσεις:
 - Ο x είναι πρώτος αριθμός διαφορετικός από το ένα.
 - Υπάρχουν πρώτοι αριθμοί
 - Κάθε ακέραιος έχει ένα πρώτο διαιρέτη
 - Κανείς αριθμός δεν είναι και περιττός και άρτιος
 - Υπάρχει ακριβώς ένα x τέτοιο ώστε $P(x)$ (ή συμβολικά $(\exists! x)P(x)$)
 - Υπάρχουν άπειρα x τέτοια ώστε $P(x)$ (ή συμβολικά $(\exists^\infty x)P(x)$)
 - Το Ε.Κ.Π. των x και y είναι ο z
 - Ο Μ.Κ.Δ. των x και y είναι ο z

- i) Κάθε άρτιος είναι το άθροισμα δύο πρώτων. (Η εικασία αυτή δεν έχει ακόμα ούτε καταρριφθεί από ένα αντιπαράδειγμα ούτε αποδειχθεί)
3. Κατασκευάστε τα κατάλληλα κατηγορήματα για τη γλώσσα της Ευκλείδειας γεωμετρίας, και δανειζόμενοι ορισμένα κατηγορήματα από τη θεωρία συνόλων:
- a) Γράψτε τα αξιώματα που πρέπει να πληρούν τα κατηγορήματα που προορίζονται για να δηλώνουν τη σχέση της καθετότητας και τη σχέση τη παραλληλίας.
- b) Γράψτε στη γλώσσα αυτή τις φράσεις:
- i) Από δύο σημεία διέρχεται μια και μόνο ευθεία.
- ii) Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.
- iii) Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μία μόνο κάθετη προς αυτή.
- iv) Τρία μη συνευθειακά σημεία ορίζουν ένα επίπεδο.
- v) Αν μια ευθεία είναι κάθετη στη μια ευθεία είναι κάθετη και σε οποιαδήποτε παράλληλό της
- vi) Αν μια ευθεία διέρχεται από δύο σημεία ενός επιπέδου τότε όλα τα σημεία της ανήκουν στο επίπεδο.
4. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω σχέσεις ισχύουν και αποδείξτε τις. Για όσες δεν ισχύουν δώστε αντιπαράδειγμα, με όποιο τρόπο κρίνετε προσφορότερο
- i) $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow [(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)]$
- ii) $(\exists x)[\neg P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow [(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)]$
- iii) $(\forall x)[P(x) \leftrightarrow Q(x)] \rightarrow [(\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)]$
- iv) $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$
5. Δίδεται μια γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων $\mathcal{L} = \{R\}$, όπου R ένα σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων, και το σύνολο $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ των προτάσεων:
- $\sigma_1 \equiv (\forall x)[\neg R(x, x)]$
- $\sigma_2 \equiv (\forall x)(\forall y)(\forall z)[R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)]$
- $\sigma_3 \equiv (\forall x)(\forall y)(\forall z)[R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)]$
- Βρείτε δύο διαφορετικά μοντέλα (ερμηνείες) $\mathcal{M}_1$ και $\mathcal{M}_2$ της $\mathcal{L}$ τέτοιες ώστε $\mathcal{M}_1 \models \Sigma$ και $\mathcal{M}_2 \not\models \Sigma$

3. Τυπικές περιγραφές γλωσσών

Θεωρώντας τη γλώσσα ως ένα σύστημα, όπως αυτό περιγράφεται από το σχετικό ορισμό που έχουμε δώσει, το πρόβλημα που τίθεται είναι να εξετάσουμε εάν είναι δυνατόν, δοσμένης μιας γλώσσας να μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο που να την προσομοιάζει, ή ακόμα γενικότερα, εάν είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο τόσο γενικό και πλούσιο το οποίο να μπορεί να προσομοιάζει οποιαδήποτε γλώσσα. Το παράδειγμα το οποίο μπορεί να αποσαφηνίσει αυτή τη σκέψη είναι αυτό της γλώσσας του κατηγορηματικού λογισμού η οποία είναι μια γενική γλώσσα που ανάλογα με τη σημασιολογία με την οποία την εφοδιάζουμε, δηλαδή με το πώς ερμηνεύουμε τα μη λογικά της σύμβολα, μπορεί να γίνει η γλώσσα της Άλγεβρας, της Θεωρίας Ομάδων, της Θεωρίας Γραφημάτων, της Γεωμετρίας κ.τ.λ.

Για λόγους μεθοδολογικούς εστιάζουμε αρχικά στο αλφάβητο και τη σύνταξη την οποία προσπαθούμε να περιγράψουμε με κάποιους αναδρομικούς κανόνες. Η αναδρομικότητα δεν είναι χαρακτηριστικό της σύνταξης μόνο στη γλώσσα του Προτασιακού ή του Κατηγορικού Λογισμού, και γενικά των τυπικών γλωσσών, αλλά υπάρχει ως δυνατότητα και στις φυσικές γλώσσες. Για παράδειγμα η γενική κτητική είναι δυνατόν να εφαρμοστεί όσες φορές θέλουμε:

Τα εξώφυλλα των βιβλίων της βιβλιοθήκης του παιδιού του καθηγητή του Α' τμήματος της Γ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου της συνοικίας Αγιά του Δήμου της Πάτρας, είναι βρεγμένα

Για τους δύο τομείς της γλώσσας, το αλφάβητο και το σύνολο των συντακτικών κανόνων, θα χρησιμοποιούμε τον όρο γραμματική. Έτσι, όπως θα δούμε στη συνέχεια, μια γραμματική μπορεί να παράγει ένα σύνολο από λέξεις, το οποίο αν δεν εφοδιαστεί και από ένα σύνολο σημασιολογικών κανόνων, παραμένει ένα τυπικό σύστημα χωρίς εκφραστικές δυνατότητες, όπως στα παραδείγματα Γ_0 , Γ_1 που περιγράψαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Μια τέτοια θεώρηση για τη γραμματική υποκρύπτει μια αντίληψη που βλέπει την επιστήμη ως μια δραστηριότητα **εξομοίωσης**. Ένα φαινόμενο είναι γνωστό από τη στιγμή που είμαστε ικανοί να το αναπαράγουμε συγκεκριμένα και πρακτικά κάτω από υλικούς όρους ή αφηρημένα ως ένα σύστημα συμβολισμών, (δηλαδή η αναπαράσταση του με μια συμβολική γλώσσα). Για παράδειγμα, ένα μόριο μιας χημικής ένωσης θεωρείται γνωστό, όταν είμαστε σε θέση να προξενήσουμε στο εργαστήριο την σύνθεσή του, που σημαίνει, όταν γνωρίζουμε

αναλυτικά τις προϋποθέσεις της σύνθεσής του, δηλαδή τα συστατικά του και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες επιτυγχάνεται η χημική αντίδραση για τη παρασκευή του. Επίσης γνωρίζουμε ένα μόριο αρκεί να έχουμε κατασκευάσει μια αναπαράσταση

του, να διαθέτουμε δηλαδή ένα σχήμα συμβατό με τη δομή του.

Πολλές φορές η εξομοίωση είναι ο μοναδικός τρόπος που διαθέτουμε για να μελετήσουμε ένα φαινόμενο.

Ο όρος **μοντέλο** που χρησιμοποιούμε εδώ δεν είναι τίποτα άλλο από την εξομοίωση όπως την περιγράψαμε προηγουμένως. Το φαινόμενο ή το αντικείμενο που έχει εξομοιωθεί είναι το **πρότυπο** του μοντέλου. Κατά συνέπεια ένα πρότυπο είναι δυνατόν να έχει περισσότερα από ένα μοντέλα.

Με μια τέτοια θεώρηση το αντικείμενο της επιστήμης συνίσταται στο να προσδιορίσει το καλύτερο, το πιο πιστό, μοντέλο.

Γενικά ένα μοντέλο αποτελείται από δύο μέρη.

Ένα σύνολο (A) από αρχικούς όρους (μη οριζόμενος)

- 1) Ένα σύνολο (Π) πράξεων (κανόνων προς εκτέλεση) οι οποίες όταν υλοποιούνται πάνω στους αρχικούς όρους, επιτρέπουν την κατασκευή της εξομοίωσης του πρότυπου.

Εάν έχουμε ένα πρότυπο Π του οποίου αναζητούμε μια εξομοίωση, το διατεταγμένο ζεύγος (A,Π) είναι ένα μοντέλο του. Εάν το σύνολο των πράξεων Π εφαρμοστεί σωστά πάνω στους αρχικούς όρους A τότε θα έχουμε ως αποτέλεσμα μια εικόνα Π' του Π.

Μια εικόνα όμως ποτέ δεν ταυτίζεται με το πρότυπό της. Η ασυμβατότητα αυτή, έστω και αν έχει ελαχιστοποιηθεί ενυπάρχει σε κάθε επιστημονική αναπαράσταση των φαινομένων. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε διάφορα μοντέλα για τη γλώσσα.

3.1 Το Άλγεβρικό Μοντέλο

Στο μοντέλο αυτό το σύνολο των αρχικών μας όρων είναι το αλφάβητο ενώ στο σύνολο των πράξεων έχουμε τις τρεις βασικές πράξεις από την Άλγεβρα Boole των υποσυνόλων: ένωση

($\cup$), τομή ($\cap$) και συμπλήρωμα ($'$), με μια ακόμα πράξη που θα ορίσουμε, την οποία θα λέμε **παράθεση**.

Πριν όμως απ' αυτό θα δώσουμε τους σημασιολογικούς κανόνες για μια σειρά από όρους που θα χρησιμοποιούμε, δηλαδή μερικούς ορισμούς, και συμβολισμούς.

Έστω Σ ένα αλφάβητο, θα συμβολίζουμε με Σ^* το σύνολο των λέξεων που παράγονται από το Σ .

Παράδειγμα: $\Sigma = \{a, b\}$

$\Sigma^* = \{a, b, aa, ab, ba, bb, \dots\}$

Έτσι μπορούμε να γράφουμε: $a \in \Sigma^*, aa \in \Sigma^*, aaaa \in \Sigma^*, abaaabbb \in \Sigma^*, \dots$

Ορισμός: Ονομάζουμε **λέξη** κάθε ακολουθία με σύμβολα από κάποιο αλφάβητο, δηλαδή κάθε στοιχείο του Σ^* , ενώ ένα σύνολο από τέτοιες λέξεις, δηλαδή υποσύνολο του Σ^* , θα το λέμε **λεξικό**.

Ορισμός: Ονομάζουμε **μήκος** μιας λέξης τον αριθμό των στοιχείων του αλφάβητου που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή της.

Δηλαδή: Ορίζουμε τη συνάρτηση $\ell: \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $w \in \Sigma^*$, το $\ell(w) \in \mathbb{N}$ δηλώνει το πλήθος των συμβόλων της w .

Παράδειγμα: Έστω $\Sigma = \{a, b\}$ τότε: $\ell(a) = 1$ και $\ell(abaa) = 5$

Ορισμός: Θεωρούμε μια λέξη λ τέτοια ώστε $\ell(\lambda) = 0$. Η λέξη λ ονομάζεται **κενή λέξη**. (Είναι μια λέξη που δεν περιέχει κανένα σύμβολο).

Μπορούμε τώρα να εισάγουμε την πράξη της παράθεσης μεταξύ λέξεων:

Ορισμός: Ορίζουμε μια πράξη στο Σ^* που την λέμε **παράθεση** (ή πολλαπλασιασμό) λέξεων ως εξής:

$$\pi: \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$$

$$\pi: (w_1, w_2) = w_1 w_2$$

δηλαδή απλά θέτω τη μια δίπλα στην άλλη.

Παράδειγμα: Έστω $\Sigma = \{a, b\}$ και $w_1 = aab a$, $w_2 = ab b$ τότε:

$$\pi(w_1, w_2) = aab aab b$$

Ενώ

$$\ell(w_1, w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$$

Πόρισμα: Άμεση συνέπεια των ορισμών αυτών είναι ότι για κάθε Σ και για κάθε $w \in \Sigma^*$

$$\lambda w = w \lambda = w$$

Δηλαδή η κενή λέξη είναι το ουδέτερο στοιχείο της παράθεσης.

Ιδιότητες της Παράθεσης:

Έστω Σ ένα οποιαδήποτε αλφάβητο, τότε:

(1) Το Σ^* είναι κλειστό ως προς την παράθεση. Δηλαδή:

$$(\forall w_1)(\forall w_2)[w_1 \in \Sigma^* \wedge w_2 \in \Sigma^* \rightarrow w_1 w_2 \in \Sigma^*]$$

(2) Η παράθεση είναι προσεταιριστική

$$(\forall w_1)(\forall w_2)(\forall w_3)[w_1 \in \Sigma^* \wedge w_2 \in \Sigma^* \wedge w_3 \in \Sigma^* \rightarrow w_1(w_2 w_3) = (w_1 w_2)w_3]$$

(3) Η παράθεση δεν είναι αντιμεταθετική

$$(\exists w_1)(\exists w_2)[w_1 \in \Sigma^* \wedge w_2 \in \Sigma^* \wedge w_1 w_2 \neq w_2 w_1]$$

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι να έχουμε $w_1 w_2 \neq w_2 w_1$.

Ισότητα έχουμε στην περίπτωση που $w_1 = w_2$ ή $w_1 = \lambda$ ή $w_2 = \lambda$ ή το Σ να είναι μονοσύνολο, κ.τ.λ.

Εάν το Σ είναι μονοσύνολο έστω $\{a\}$ τότε $w_1 = aa$, $w_2 = aaa$ αλλά $w_1 w_2 = aaaaaa = w_2 w_1$

(4) Η παράθεση έχει ουδέτερο στοιχείο την κενή λέξη λ :

$$(\forall w)[w \in \Sigma^* \rightarrow w \lambda = \lambda w = w]$$

5) Οι λέξεις της μορφής w_1w_2 είναι σύνθετες λέξεις και το μήκος τους δεν είναι παρά το άθροισμα των μηκών των συμβαλλόμενων λέξεων:

$$(\forall w_1)(\forall w_2)[w_1 \in \Sigma^* \wedge w_2 \in \Sigma^* \rightarrow \ell(w_1w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2)]$$

Σχόλιο : Το αλφάβητο Σ , το σύνολο Σ^* και τα υποσύνολα του είναι όλα **σύνολα** λέξεων και κατά συνέπεια ισχύουν γι' αυτά οι βασικές συνολοθεωρητικές πράξεις, ένωση $\{\cup\}$, τομή $\{\cap\}$, συμπλήρωμα $\{\cdot\}$.

Θα ορίσουμε τώρα την παράθεση μεταξύ λεξικών:

Ορισμός (γενίκευση της π): Έστω Σ ένα αλφάβητο. Ορίζουμε στο σύνολο των υποσυνόλων του Σ^* , το $P(\Sigma^*)$, την πράξη **παράθεση** ως εξής:

$$\Pi: P(\Sigma^*) \times P(\Sigma^*) \rightarrow P(\Sigma^*)$$

Για τα $A, B \in P(\Sigma^*)$ (ή $A \subseteq \Sigma^*$ και $B \subseteq \Sigma^*$)

ορίζουμε το $\Pi(A, B) = AB$ με $AB = \{w_1w_2 / w_1 \in A \text{ και } w_2 \in B\}$

Παράδειγμα: Έστω $\Sigma = \{a, b\}$ και έστω $A = \{a, ab, aa, bb\}$

$B = \{b, bb\}$ τότε το AB (A παράθεση B) θα είναι:

$$AB = \{ab, abb, aab, bbb, abbb, aabb, bbbb\}$$

Ιδιότητες της παράθεσης (Π) λεξικών:

(1) Το $P(\Sigma^*)$ είναι κλειστό ως προς την πράξη αυτή:

$$(\forall A)(\forall B)[A \in P(\Sigma^*) \wedge B \in P(\Sigma^*) \rightarrow AB \in P(\Sigma^*)]$$

(2) Η Π είναι προσεταιριστική: Για οποιαδήποτε λεξικά A, B, Γ που είναι στοιχεία του $P(\Sigma^*)$

$$(AB)\Gamma = A(B\Gamma)$$

(3) Η Π δεν είναι αντιμεταθετική: Για οποιαδήποτε λεξικά A, B, Γ που είναι στοιχεία του $P(\Sigma^*)$

$$AB \neq BA$$

(4) Η Π έχει ουδέτερο στοιχείο το $\{\lambda\}$: Για κάθε $A \in P(\Sigma^*)$:

$$A\{\lambda\}=\{\lambda\}A=A$$

(5) Το $\emptyset$ είναι απορροφητικό στοιχείο για την Π : Για κάθε $A \in P(\Sigma^*)$

$$A\emptyset=\emptyset A=\emptyset$$

(6) Η παράθεση επιμερίζεται ως προς την ένωση: Για οποιαδήποτε A, B, Γ , από το $P(\Sigma^*)$

$$A(B \cup \Gamma) = AB \cup A\Gamma$$

(7) Η παράθεση δεν επιμερίζεται ως προς την τομή: Υπάρχουν A, B, Γ στο $P(\Sigma^*)$ τέτοια ώστε :

$$A(B \cap \Gamma) \neq AB \cap A\Gamma$$

Σχόλιο:

Για κάθε λεξικό A στοιχείο του $P(\Sigma^*)$ έχουμε $A \subseteq \Sigma^*$. Το συμπλήρωμα λοιπόν είναι ως προς το Σ^* . Προφανώς το $\emptyset$ και το Σ^* είναι λεξικά και το ένα είναι συμπλήρωμα του άλλου.

Αποδείξεις των Ιδιοτήτων

(1) Από τον ορισμό της πράξης: έχουμε ότι

$$AB = \{w_1 w_2 / w_1 \in A \wedge w_2 \in B\}$$

άρα τα στοιχεία του νέου συνόλου AB φτιάχνονται όλα από στοιχεία του Σ άρα είναι υποσύνολο του Σ^* άρα στοιχείο του $P(\Sigma^*)$

$$(2) \quad (AB)\Gamma = \{x/x=(w_1 w_2)w_3 \wedge (w_1 w_2) \in AB \wedge w_3 \in \Gamma\}$$

$$= \{x/x=w_1(w_2 w_3) \wedge w_1 \in A \wedge w_2 \in B \wedge w_3 \in \Gamma\}$$

$$= \{x/x=w_1(w_2 w_3) \wedge w_1 \in A \wedge (w_2 w_3) \in B\Gamma\}$$

$$=A(B\Gamma)$$

(3) **Αντιπαράδειγμα:** Αν $A=\{\alpha\}$ και $B=\{\beta\}$. Έχουμε:

$$AB=\{\alpha\beta\} \text{ και } BA=\{\beta\alpha\} \text{ άρα } AB \neq BA \text{ αφού } \alpha\beta \neq \beta\alpha$$

$$(4) A\{\lambda\} = \{w_1 w_2 / w_1 \in A \text{ και } w_2 \in \{\lambda\}\} = \{w_1 w_2 / w_1 \in A \text{ και } w_2 = \lambda = \{w_1 \lambda / w_1 \in A\} = \{w_1 / w_1 \in A\} = A$$

Όμοια $\{\lambda\}A=A$

$$(5) A\emptyset = \{w_1w_2/w_1 \in A \wedge w_2 \in \emptyset\}$$

όμως η πρόταση $w_2 \in \emptyset$ είναι πάντα ψευδής άρα και η σύζευξή της με την $w_1 \in A$. Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του συνόλου $A\emptyset$ πληρούν μια σχέση που είναι πάντα ψευδής. Ένα τέτοιο σύνολο όμως είναι μόνο το κενό σύνολο. Άρα $A\emptyset = \emptyset$.

$$(6) A(B \cup \Gamma) = \{w_1w_2/w_1 \in A \wedge w_2 \in B \cup \Gamma\}$$

$$= \{w_1w_2/w_1 \in A \wedge w_2 \in B \vee (w_1 \in A \wedge w_2 \in \Gamma)\}$$

$$= \{w_1w_2/w_1w_2 \in AB \vee w_1w_2 \in A\Gamma\}$$

$$= \{w_1w_2/w_1w_2 \in AB \cup A\Gamma\} = AB \cup A\Gamma$$

(7) **Αντιπαράδειγμα:** Αν πάρουμε $A=\{a, aa\}$, $B=\{a\}$ και $\Gamma=\{a\}$

Τότε: $B \cap \Gamma = \emptyset$ άρα $A(B \cap \Gamma) = \emptyset$, ενώ: $AB=\{aa, aaa\}$, $A\Gamma=\{aaa, aaaa\}$ και $AB \cap A\Gamma = \{aaa\} \neq \emptyset$

Σχόλιο:

Είναι χρήσιμο στην περίπτωση που έχουμε παράθεση μιας λέξης (ή ενός συνόλου λέξεων) με τον εαυτό της (του) να μπορούμε να το δηλώνουμε με ένα φυσικό αριθμό ως εκθέτη. Για παράδειγμα αντί για aaa να γράφουμε a^3 ή αντί για $AAAA$ να γράφουμε A^4 . Για το σκοπό αυτό δίνουμε τον παρακάτω αναδρομικό ορισμό.

Ορισμός: Έστω Σ ένα αλφάβητο, $a \in \Sigma$ και $A \subseteq \Sigma^*$. Ορίζουμε:

$$\alpha) a^0 = \lambda \text{ και } a^{\{k+1\}} = a^k a$$

$$\beta) A^0 = \{\lambda\} \text{ και } A^{\{k+1\}} = A^k A$$

Με τους ορισμούς αυτούς παίρνουν νόημα οι συμβολισμοί a^k και A^k και μάλιστα:

$$\text{για κάθε } k, a^k \in \Sigma^* \text{ και } A^k \subseteq \Sigma^* \text{ (ή } A^k \in P(\Sigma^*))$$

Επίσης μπορούμε να περιγράψουμε αναλυτικά το Σ^* περιγράφοντας μια αναδρομική διαδικασία κατασκευής του ως εξής:

$$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \dots \cup \Sigma^k \cup \dots \text{ ή } \Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

Είναι φανερό ότι ο ορισμός αυτός εξασφαλίζει ότι για οποιαδήποτε Σ , $\lambda \in \Sigma^*$

Ακόμη για οποιοδήποτε λεξικό A , $A \in P(\Sigma^*)$ ορίζεται:

$$A^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i$$

Πόρισμα: Για κάθε Σ και κάθε A , $A \in P(\Sigma^*)$ ισχύει ότι:

$$A^* \in P(\Sigma^*)$$

Δηλαδή αν διαθέτουμε ένα αλφάβητο Σ , τότε οποιοδήποτε σύνολο λέξεων από το Σ και αν πάρουμε ως νέο αλφάβητο, δεν θα μπορέσουμε να φτιάξουμε μια λέξη που να μην ανήκει στο Σ^*

Παραδείγματα:

Στο παράδειγμα Γ_2 έχουμε ότι $\Sigma_2 = \{0,1\}$ τότε:

$$\Sigma_2^* = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \dots\}$$

Το λεξικό Λ_2 που παράγει η Γ_2 είναι προφανώς διαφορετικό από το Σ_2^* , ($\Lambda_2 \not\subseteq \Sigma_2^*$). Αιτία γι' αυτό είναι ο περιορισμός που έχει τεθεί στους συντακτικούς κανόνες της Γ_2 .

Μπορούμε ωστόσο να περιγράψουμε με τη βοήθεια της παράθεσης λεξικών τους συντακτικούς κανόνες της Γ_2 ως εξής:

$$\Lambda_2 = \{0\} \cup \{1\}\{0,1\}^*$$

Το λεξικό αυτό δεν είναι άλλο από το σύνολο των ονομάτων των φυσικών αριθμών γραμμένων στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης. Η συμβολική έκφραση για το λεξικό αυτό δηλώνει ουσιαστικά το σύνολο των κανόνων παραγωγής για τη δυαδική γλώσσα των φυσικών αριθμών, αφού αν εκτελεστούν οι σημειωμένες πράξεις έχουμε τα ονόματα των αριθμών.

3.1.1 Ασκήσεις

1) Δίδεται το αλφάβητο $\Sigma = \{0,1\}$. Βρείτε μια συμβολική έκφραση για καθένα από τα παρακάτω λεξικά:

α) Το σύνολο των λέξεων που τελειώνουν σε 01.

β) Το σύνολο των λέξεων που αρχίζουν με 1.

γ) Το σύνολο των λέξεων στις οποίες η ακολουθία 101 να διαθέτει μια τουλάχιστον εμφάνιση.

δ) Το σύνολο των λέξεων που αρχίζουν με 101 και τελειώνουν σε 101.

ε) Το σύνολο όλων των λέξεων.

2) Περιγράψτε τη γλώσσα των αριθμών στο τριαδικό, πενταδικό και δωδεκαδικό σύστημα.

3) Δίδονται, το αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$ και τα σύνολα $A = \{\alpha\}$ και $B = \{\beta\}$. Να περιγραφούν με λόγια και μετά με συμβολισμούς τα σύνολα:

(1) $(AB)^*$

(5) $(A \cup B)^* B$

(9) $(AB)^* - (AB)^3$

(2) $A^* B^*$

(6) $(A \cup B) A^2$

(10) $((A \cup B)^*)^*$

3) $(A \cup B)^*$

(7) $(A \cup B)^* - (BAB)^*$

(4) $(A \cap B)^*$

(8) $(A \cup B)^* - A^*$

4) Έστω A, B, Γ λεξικά από κάποιο αλφάβητο Σ . Αποδείξτε αυστηρά όσες από τις παρακάτω σχέσεις ισχύουν και δώστε αντιπαράδειγμα για όσες δεν ισχύουν:

1) $(AB)^* = A^* B^*$

(3) $A(BA)^* = (AB)^* A$

(2) $A^* B^* \subseteq (A \cup B)^*$

(4) $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$

3.2 Το μοντέλο των γενετικών (ή παραγωγικών) γραμματικών

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε ένα κανόνα επαναγραφής της μορφής:

$$X \rightarrow Y$$

ο οποίος πρέπει να κατανοείται σαν μια εντολή που σημαίνει γράψε το σύμβολο Y στη θέση του συμβόλου X . Οι κανόνες του τύπου αυτού ονομάζονται **κανόνες παραγωγής**, ενώ μια διαδικασία εφαρμογής ενός συνόλου από τέτοιους κανόνες, η οποία καταλήγει σε μια συγκεκριμένη ακολουθία συμβόλων, ονομάζεται **παραγωγή** της ακολουθίας αυτής.

Ας δούμε ορισμένα παραδείγματα:

Γ_5 : Αλφάβητο $\Sigma_5 = \{a\}$

Το σύνολο των λέξεων που μπορεί να παραχθεί από το σύνολο αυτό είναι το $\{a\}^*$ που είναι

$$\Sigma_5^* = \{\lambda, a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$$

Το σύνολο αυτό είναι δυνατόν να παραχθεί και με τη χρησιμοποίηση κάποιων κανόνων παραγωγής, όπως:

$$(1) A \rightarrow Aa$$

$$(2) A \rightarrow \lambda \quad (\text{όπου } \lambda \text{ η κενή λέξη})$$

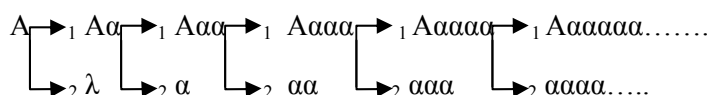
Τα κεφαλαία γράμματα εδώ χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές με την έννοια ότι: Αν σε μια ακολουθία από σύμβολα εμφανίζεται μεταβλητή, τότε είναι δυνατόν να εφαρμοστεί ένας κανόνας αντικατάστασης, αρκεί αυτός να δηλώνει με τι θα αντικατασταθεί η μεταβλητή αυτή. Έτσι στην ακολουθία $\$Aa\$$ μπορώ να εφαρμόσω και τους δύο από τους διαθέσιμους κανόνες. Από τον (1) θα έχω:

$$Aa \rightarrow Aaa$$

ενώ από τον (2):

$$Aa \rightarrow \lambda a \text{ ή } Aa \rightarrow a$$

Η συστηματική εφαρμογή των κανόνων δίνει:



Το λεξικό λοιπόν που παράγεται είναι το: $\{\lambda, a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$ δηλαδή το $\{a\}^*$

Σχόλιο

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όταν διαθέτουμε ένα λεξικό για το οποίο μπορούμε να βρούμε μια έκφραση στο αλγεβρικό μοντέλο, τότε ενδεχόμενα να υπάρχει ένα σύνολο από κανόνες παραγωγής το οποίο να παράγει το ίδιο λεξικό. Αποδεικνύεται ότι πάντα υπάρχει ένα τέτοιο σύνολο, ωστόσο η απόδειξη ξεφεύγει από τους στόχους των παραδόσεων αυτών.

Η αναδρομικότητα που είναι ενσωματωμένη στην πράξη (*), εδώ ενυπάρχει στους κανόνες παραγωγής του τύπου:

$$A \rightarrow Aa$$

Εάν θέλουμε να παράγουμε λεξικά γνήσια υποσύνολα του $\{a\}^*$ δεν έχουμε παρά να εισάγουμε κάποιους περιορισμούς, τροποποιώντας κατάλληλα τους κανόνες παραγωγής. Έτσι για το σύνολο $\{a^k/k \in \mathbb{N} \text{ και } k \text{ άρτιος}\}$ που στο αλγεβρικό μοντέλο είναι το $\{aa\}^*$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες:

$$(1) A \rightarrow Aaa$$

$$(2) A \rightarrow \lambda$$

Αν θελήσουμε να κατασκευάσουμε με αλφάβητο το $\Sigma_6 = \{a, b\}$ το λεξικό: $\{a^k b^k, k=1, 2, 3, \dots\}$

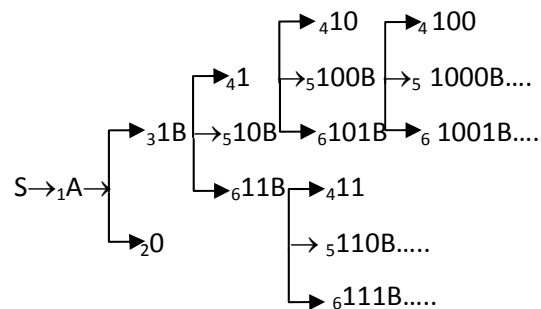
τότε το αλγεβρικό μοντέλο δεν δίνει λύση.

Αντίθετα έχουμε μια πολύ απλή λύση με τους κανόνες παραγωγής:

$$(1) A \rightarrow aAb$$

$$(2) A \rightarrow \lambda$$

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι το αλγεβρικό μοντέλο είναι προφανώς πιο φτωχό από αυτό των γενετικών γραμματικών που εξετάζουμε εδώ.



- 1) Να κατασκευαστεί μια γενετική γραμματική για κάθε σύνολο λέξεων της άσκησης (1) από την ομάδα 3.1.1.
- 2) Να κατασκευαστεί μια γενετική γραμματική για το τριαδικό και πενταδικό σύστημα αρίθμησης, με αλφάβητα αντίστοιχα $\{0, 1, 2\}$ και $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

Διδακτική αξιοποίηση των τυπικών περιγραφών

4. Οι γλώσσες των φυσικών αριθμών

Η ιστορία των μαθηματικών, και η ιστορία του πολιτισμού γενικότερα, έχει να επιδείξει μια μεγάλη ποικιλία από αριθμητικά συστήματα. Κάθε ανθρώπινη κοινωνία που με σχετική αυτοτέλεια πραγματοποιεί τα πρώτα της πολιτισμικά βήματα, αναπτύσσει, μαζί με τη φυσική γλώσσα, και μια πολύ ειδική συμβολική, αλλά και προφορική, γλώσσα κατάλληλη για να εκφράζει και να αποτυπώνει την απαριθμήσιμη πολλαπλότητα. Αυτή την πολύ ειδική συμβολική γλώσσα έχει επικρατήσει να τη λέμε αριθμητικό σύστημα (ή και σύστημα αρίθμησης). Κάθε τέτοιο σύστημα, ανεξάρτητα από την εποχή που εμφανίστηκε και χρησιμοποιήθηκε, έχει πάντα τρία χαρακτηριστικά:

(α) **Αλφάβητο**: Το σύνολο (A) των χρησιμοποιούμενων συμβόλων.

(β) **Κανόνες σύνταξης**: Ο γενικός κανόνας σύνταξης είναι η παράθεση συμβόλων, με ενδεχόμενα κάποιους περιορισμούς.

(γ) **Κανόνες σημασίας**: Δηλαδή οι κανόνες αντιστοίχισης των στοιχείων του¹ A^* που είναι γραμματικώς ορθές ακολουθίες, με τις πληθικότητες.

Ανάλογα με το είδος του συνδυασμού των συντακτικών και των σημασιολογικών κανόνων τα αριθμητικά συστήματα ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες:

4.1 Τα απλώς αθροιστικά

Εκείνα δηλαδή στα οποία *κάθε* ακολουθία συμβόλων από το αλφάβητό τους είναι αποδεκτή, δηλαδή δηλώνει κάποιο αριθμό, έστω και αν οι χρήστες τους είχαν κάθε φορά κάποια προτίμηση στη *σειρά* γραφής των συμβόλων. Πρόκειται για γλώσσες ελεύθερες από τα συμφραζόμενα.

Τα συστήματα αυτά, στα οποία η σημασιολογική συνάρτηση είναι:

$$f: A^* \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) = f(a_n) + f(a_{n-1}) + \dots + f(a_2) + f(a_1) + f(a_0)$$

όπου $a_i \in A$, διέπονται από μια μόνο αρχή την προσθετική γι' αυτό τα λέμε **απλώς αθροιστικά** ή **αθροιστικά** ή **προσθετικά**.

¹ Με A^* συμβολίζουμε το σύνολο όλων των δυνατών πεπερασμένων ακολουθιών από στοιχεία του A.

(β) **Κανόνες σύνταξης:** Όπως το Μινωικό μέχρι το 59. Για μεγαλύτερους αριθμούς η σύνταξη είναι αυτή των θεσιακών συστημάτων.

(γ) **Κανόνες σημασίας:** (βλ. §1.1)

Το Ακροφωνικό:

Το Ακροφωνικό (ή Ηρωδιανό) χρησιμοποιήθηκε στην αρχαία Ελλάδα από τους ηρωικούς περίπου χρόνους μέχρι την πλήρη αντικατάστασή του από το Ιωνικό:

(α) **Αλφάβητο:** |, Π, Δ, Η, Χ, Μ.

(β) **Κανόνες σύνταξης:** Ο γενικός κανόνας σύνταξης είναι η παράθεση συμβόλων, με αντικατάσταση πέντε συμβόλων πρώτης τάξης από το Π, δύο τέτοιων συμβόλων από το Δ και στη συνέχεια κάθε δέκα σύμβολα μιας τάξης αντικαθίσταται από το σύμβολο της αμέσως επόμενης τάξης, ενώ εμφανίζεται και η επίθεση: Π Π Π Π

(γ) **Κανόνες σημασίας:**

(|, 1), (Π, 5), (Δ, 10), (Η, 100), (Χ, 1000), (Μ, 10.000).

Δηλαδή το αλφάβητο προέρχεται από ακροφωνισμό των φυσικών ονομάτων των αριθμών.

Το Π από το πέντε το Δ από το Δέκα, το Η από το Ηεκατό, το Χ από το Χιλιάδες, και το Μ από το Μυριάδες.

Ενώ (Π, 50), (Π, 500), (Π, 5000), (Π, 50.000), δηλαδή η επίθεση συμβόλων δηλώνει πολλαπλασιασμό.

Έτσι Π Μ Χ Χ Χ Η Δ Δ Δ Δ Π ||| είναι ο:

$$50.000 + 10.000 + 3.000 + 100 + 40 + 5 + 3 = 63143$$

Η ύπαρξη του ειδικού συμβόλου για το πέντε, (με τη συνακόλουθη ανωμαλία στη σημασιολογία) σε συνδυασμό με το ότι στον Όμηρο *πεμπάζω* (μιλώ με πεντάδες) σημαίνει καταμετρώ λογαριάζω, φανερώνουν ότι σε πολύ αρχαιότερες του Ομήρου εποχές θα πρέπει να ήταν σε χρήση ένα πενταδικό σύστημα αρίθμησης

Το Ιωνικό:

Το Ιωνικό, που εμφανίστηκε γύρο στο 700 π.Χ. στις Ιωνικές πόλεις της Μικράς Ασίας, διέθετε 27 σύμβολα που είναι τα 24 του Ιωνικού αλφάβητου, δηλαδή της κεφαλαίας μεγαλογράμματης γραφής, μαζί με το δίγαμμα Ϝ, το κόπα Ϟ, και το σαμπί ϟ, τα οποία στη μικρογράμματη γραφή πήραν τις μορφές, ϝ, Ϟ, και ϟ. Κατά τη Βυζαντινή περίοδο το δίγαμμα ϝ αντικαταστάθηκε από το στ'.

Ο παρακάτω πίνακας διπλής εισόδου δίνει το αλφάβητο και τη σημασιολογία για τις δυνάμεις του 10. Το σύστημα είναι αθροιστικό, κατά συνέπεια δεν απαιτείται σύμβολο για το μηδέν. Ενώ ο γενικός κανόνας σύνταξης είναι η παράθεση συμβόλων, εκτός από τις μυριάδες που έχουμε επί-θεση γραμμάτων.

X	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
1	α΄	ι΄	ρ΄	,α	$\overset{\alpha}{M}$	$\overset{\alpha}{M}$	$\overset{\alpha}{M}$	$\overset{\alpha}{M}$	$\overset{\alpha}{M}$
2	β΄	κ΄	σ΄	,β	$\overset{\beta}{M}$				
3	γ΄	λ΄	τ΄	,γ	$\overset{\gamma}{M}$				
4	δ΄	μ΄	υ΄	,δ	$\overset{\delta}{M}$				
5	ε΄	ν΄	φ΄	,ε	$\overset{\epsilon}{M}$				
6	ζ΄	ξ΄	χ΄	,ζ	$\overset{\zeta}{M}$				
7	ζ΄	ο΄	ψ΄	,ζ	$\overset{\zeta}{M}$				
8	η΄	π΄	ω΄	,η	$\overset{\eta}{M}$				
9	θ΄	ϙ΄	ϰ΄	,θ	$\overset{\theta}{M}$				

Έτσι ο ,δν΄ είναι ο 4050 ενώ ο M,ζια΄ είναι ο 17011.

Σχόλιο: Στα αθροιστικά αριθμητικά συστήματα δεν απαιτείται η δήλωση της θέσης, οπότε δεν το έχουν την ανάγκη ενός συμβόλου για το μηδέν. Έτσι δεν διαθέτουν σύμβολο για το μηδέν.

4.2 Τα συστήματα θέσης².

Συστήματα θέσης (ή θεσιακά) λέμε εκείνα τα αριθμητικά συστήματα στα οποία η αξία κάποιου συμβόλου εξαρτάτε όχι μόνο από τη μορφή του αλλά και από τη θέση που κατέχει στην ακολουθία συμβόλων που αποτελεί όνομα κάποιου αριθμού.

Η ανακάλυψη του μηδενός είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την εμφάνιση της έννοιας της θέσης. Τα συστήματα θέσης διαθέτουν υποχρεωτικά ένα σύμβολο για το μηδέν, ενώ τα απλά αθροιστικά, όχι, αφού δεν τους είναι χρήσιμο. Αυτή είναι και η βαθύτερη ουσιαστική αιτία που το μηδέν δεν εμφανίζεται, δεν επινοήθηκε, στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά ως λειτουργικό σύμβολο του συστήματος αρίθμησης. Το πιο αρχαϊκό σύστημα θέσης είναι το εξηκονταδικό των βαβυλώνιων, για τους μεγαλύτερους του 59 αριθμούς όπου ως σύμβολο για το μηδέν εμφανίζεται η κενή θέση. Στον προ-Κολομβιανό πολιτισμό των Μάγια³ έχουμε άλλο ένα πλήρες σύστημα θέσης με βάση το 20 (η ανωμαλία στις μονάδες τρίτης τάξης δεν

² [Ifrah,1983,1997,σ.18]

³ Η χρυσή εποχή του πολιτισμού των Μάγια είναι οι 3^{ος}, 4^{ος}, 5^{ος} αιώνας μ. Χ. Ωστόσο, καθώς το πολιτισμικό τους επίπεδο αναλογεί σ' αυτό της προκλασικής Ελληνικής Αρχαιότητας, γι' αυτό οι κατακτήσεις τους σε πολλούς τομείς, μελετούνται σε σύγκριση με τους αρχαίους πολιτισμούς.

αλλάζει την ουσία του). Το αλφάβητό του έχει μόνο τρία σύμβολα, για το ένα το πέντε και για το μηδέν. Από το 1 μέχρι και το 19 το σύστημα είναι αθροιστικό και έτσι εξασφαλίζονται τα 19 από τα 20 απαιτούμενα σύμβολα. Το σύμβολο του μηδενός ήταν ένα σύνταξη γίνεται σε στήλη, με τις μονάδες μικρότερης τάξης στη χαμηλότερη θέση.

Στην Ιστορία του Πολιτισμού, [Ifrah,1983,1997,σ.18] η αρχή της θέσης επινοήθηκε τέσσερις φορές: Από τους σοφούς της Βαβυλώνας στις αρχές της 2ης π.Χ. χιλιετίας, από τους Κινέζους Μαθηματικούς και λογιστές στους πρώτους μ.Χ. αιώνες, από τους Ινδούς Μαθηματικούς και Αστρονόμους μεταξύ 3ου και 4ου μ.Χ. αιώνα και από τους ιερείς και Αστρονόμους των Μάγια, πιθανότατα στις αρχές του 5^{ου} μ.Χ. αιώνα. Η επινοήση του μηδενός είναι ακόμη πιο σπάνια. Τη συναντάμε στους Βαβυλώνιους του 4ου π.Χ αιώνα, στους Ινδούς Μαθηματικούς του 3ου με 4ου μ.Χ. αιώνα και ακόμα μια φορά, περίπου την ίδια εποχή στους ιερείς των Μάγια.

Έτσι, σ' αντίθεση με τα αθροιστικά, είναι δεσμευμένες από τα συμφραζόμενα γλώσσες και μάλιστα κανονικές. Στην Ιστορία του Πολιτισμού, η αρχή της θέσης επινοήθηκε τέσσερις φορές: Από τους σοφούς της Βαβυλώνας στις αρχές της 2ης π.Χ. χιλιετίας, από τους Κινέζους Μαθηματικούς και λογιστές στους πρώτους μ.Χ. αιώνες, από τους Ινδούς Μαθηματικούς και Αστρονόμους μεταξύ 3ου και 4ου μ.Χ. αιώνα και από τους ιερείς και Αστρονόμους των Μάγια, πιθανότατα στις αρχές του 5^{ου} μ.Χ. αιώνα. Η επινοήση του μηδενός είναι ακόμη πιο σπάνια. Τη συναντάμε στους Βαβυλώνιους του 4^{ου} π.Χ αιώνα, στους Ινδούς Μαθηματικούς του 3^{ου} με 4^{ου} μ.Χ. αιώνα και ακόμα μια φορά, περίπου την ίδια εποχή στους ιερείς των Μάγια.

Αν το **αλφάβητο** είναι το A , το σύνολο των ονομάτων δίνεται από την (δηλαδή η **σύνταξη** περιγράφεται από την) κανονική έκφραση⁴:

$$\{0\} \cup (A - \{0\})A^*$$

όπου 0 είναι το σύμβολο για τον πληθάριθμο του κενού, ενώ η **σημασιολογική** συνάρτηση είναι:

$$f(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

με $a_i \in A$ και b είναι ο πληθάριθμος του A , δηλαδή η βάση του αριθμητικού συστήματος.

Παράδειγμα: Το σημερινό σε χρήση ινδοαραβικό:

Αλφάβητο: $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Κανόνες σύνταξης: Μια οποιαδήποτε ακολουθία στοιχείων του Σ είναι αποδεκτή (είναι δηλαδή **λέξη**) μόνο αν δεν έχει ως πρώτο από αριστερά σύμβολο το 0, με εξαίρεση την 0. Θα συμβολίζουμε με Σ' το σύνολο των λέξεων, είναι δε $\Sigma' \subseteq \Sigma^*$, όπου με Σ^* συμβολίζεται

⁴ Βλέπε Παρ.....

το σύνολο όλων των ακολουθιών από στοιχεία του Σ . Η κανονική έκφραση που το περιγράφει είναι:

$$\{0\} \cup \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \{0,1,\dots,9\}^*$$

Κανόνες σημασίας: Το σύνολο των κανόνων σημασίας περιγράφεται από τη συνάρτηση:

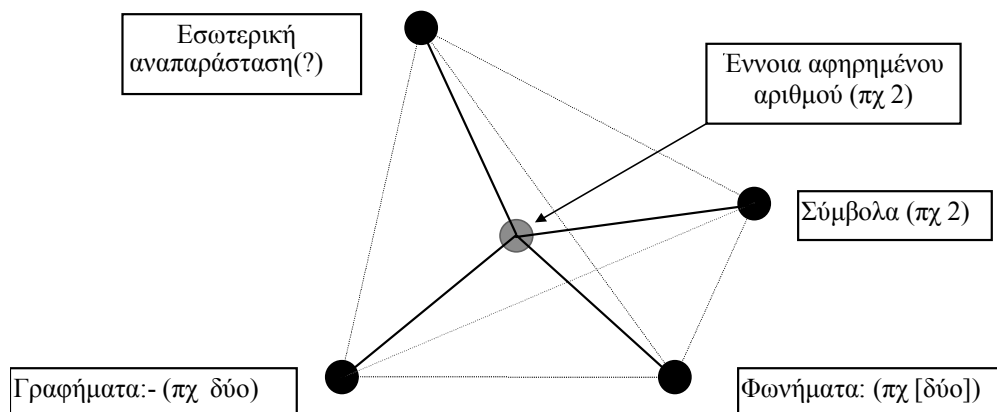
$$f: \Sigma' \rightarrow \mathbb{N}$$

όπου Σ' είναι το σύνολο των επιτρεπτών (των καλών) ακολουθιών από το Σ , και $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών που περιέχει και το μηδέν, με τα $a_i \in \Sigma$, ως εξής:

$$f(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

Όλα τα συστήματα που για διάφορους λόγους κατασκευάζονται σήμερα, όπως δυαδικό και οκταδικό για τις ανάγκες των Η/Υ, δομούνται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αλλάζει μόνο το αλφάβητο.

Όμως, παράλληλα με τις συμβολικές αυτές γλώσσες, η κάθε πολιτισμική-γλωσσική κοινότητα, κατακτούσε και τις αντίστοιχες προφορικές γλώσσες των αριθμών, το σύστημα δηλαδή των απόλυτων αριθμητικών.



Το σύστημα των γλωσσικών σημείων τα οποία συγκροτούνται γύρο από την αφηρημένη έννοια του αριθμού, την έννοια δηλαδή που υφίσταται μόνο μέσα στα πλαίσια της λογικής μας φαντασίας, μπορεί να αναπαρασταθεί όπως δείχνει το παραπάνω σχήμα.

Στον Ελλαδικό χώρο, κατά την ιστορική περίοδο που διαθέτουμε αξιόπιστες πηγές, έχουν χρησιμοποιηθεί τέσσερις διαφορετικές συμβολικές γλώσσες: μινωικό (και κρητομυκηναϊκό), ακροφωνικό, ιωνικό, ινδοαραβικό, ενώ μόνο δύο προφορικές που διαφέρουν μόνο ως προς τη σύνταξη. Δηλαδή σε μια πρώτη περίοδο που φτάνει μέχρι και τη Βυζαντινή περίοδο, εκφωνούσαν πρώτα τις μονάδες μικρότερης τάξης. Έλεγαν δηλαδή για το 135, *πέντε και τριάκοντα και εκατό*. Η γλώσσα αυτή κανονικοποιήθηκε αργότερα, προσαρμόζομενη απόλυτα στη συμβολική. Έτσι σήμερα, οι Ελληνόφωνες εκφωνούν ότι ακριβώς

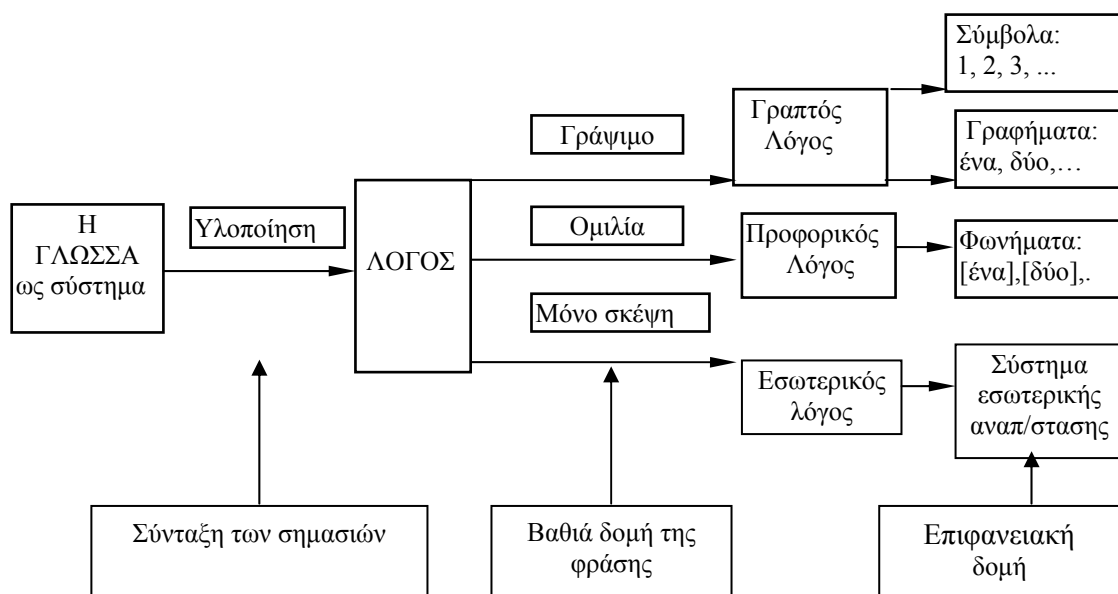
γράφουμε στη συμβολική γλώσσα. Οι δύο γλώσσες, στη σημερινή τους εκδοχή, παράγονται από γενετικές, αλλά όχι μετασχηματιστικές, γραμματικές οι οποίες είναι κανονικές, οι απλούστερες δηλαδή δυνατές.

Είναι φανερό λοιπόν ότι οι πολύ ειδικές γλώσσες των αριθμών, τα αριθμητικά συστήματα, είναι φυσικές γλώσσες, ως προς την προέλευσή τους, και συγχρόνως τυπικές γλώσσες ως προς τη δομή τους αφού παράγονται από τυπικές γραμματικές. Πώς όμως οι γλώσσες αυτές επηρέασαν τη φυσική γλώσσα στα πλαίσια της οποίας γεννήθηκαν και ολοκληρώθηκαν;

4.3 Το συνολικό σύστημα «γλώσσα των αριθμών»

Στην προηγούμενη παράγραφο περιγράψαμε μία πλευρά, τη συμβολική, της γλώσσας των αριθμών. Ωστόσο ένας αριθμός μπορεί να δηλώνεται με το όνομα που έχει στη φυσική γλώσσα. Αποτελεί το σύνολο των ονομάτων αυτών μια άλλη ειδική γλώσσα; Και τι συμβαίνει γενικότερα κατά την πραγμάτωση του συνολικού συστήματος γλώσσα των αριθμών;

Το παρακάτω διάγραμμα σχηματίζει τα στιγμιότυπα της υλοποίησης του συστήματος γλώσσα των αριθμών σε ένα κοινωνικό άτομο με στοιχειώδη παιδεία. Βεβαίως η διαδικασία αυτή δεν είναι καθόλου γραμμική όσο παρουσιάζεται στο διάγραμμα. Έχει όμως ως αποτέλεσμα τέσσερις δυνατότητες αναπαράστασης, ανάλογα με τις απαιτήσεις της στιγμής. Μπορεί να είναι *προφορικός λόγος* (φωνήματα), *γραφτός* με δύο δυνατότητες: *γραφήματα των φωνημάτων* ή *γραφήματα των συμβόλων*, και τέλος να μην πραγματοποιηθεί διατύπωση λόγου αλλά ο λόγος να παραμείνει εσωτερικός και ως τέτοιος έχει το δικό του σύστημα αναπαράστασης, το οποίο μάλιστα από άνθρωπο σε άνθρωπο διαφέρει, ανεξάρτητα αν πρόκειται για ανθρώπους με κοινό γλωσσικό αισθητήριο ή όχι..



Στη συνέχεια θα εστιάσουμε την ανάλυσή μας στη συμβολική δυνατότητα και στην καθομιλούμενη, είτε πρόκειται για γραπτή, (γραφήματα των ονομάτων των αριθμών), είτε πρόκειται για προφορική (φωνήματα των ονομάτων των αριθμών), και στη μεταξύ τους σχέση.

Κάθε τέτοια δυνατότητα όχι μόνο διατηρεί μια αυτοτέλεια αφού παράγεται από άλλη τυπική γραμματική, άρα μπορούμε να μιλάμε για συμβολική και καθομιλούμενη γλώσσα των αριθμών, αλλά έχει και το δικό της ανεξάρτητο δρόμο ανάπτυξης, και κατά τη φυλογένεση και κατά την οντογένεση.

Έχουμε δείξει [Παπαδοπετράκης, 1998] ότι *οι δύο γλώσσες, συμβολική και καθομιλούμενη, δεν γεννήθηκαν ταυτόχρονα ως ενιαίο όλο με τη μορφή που σήμερα τις διαθέτουμε. Έχουν όπως εντελώς διαφορετική ιστορία πίσω τους. Μπορούμε να διακρίνουμε ένα προ-προφορικό στάδιο γένεσης της συμβολικής γλώσσας κατά τη φυλογένεση, και παράλληλα μια εντελώς αυτοτελή γένεση και ιστορική πορεία της προφορικής γλώσσας.*

Ιδωμένο συγχρονικά το πρόβλημα

Ας εξετάσουμε όμως τη σχέση των δύο αναπαραστάσεων στα πλαίσια της ίδιας φυσικής γλώσσας της Ελληνικής: Η συμβολική έχει αλλάξει τέσσερις φορές από τους Ηρωικούς χρόνους μέχρι σήμερα, αφού έχουν χρησιμοποιηθεί το Κρητομικναϊκό, το Ακροφωνικό, το Ιωνικό, το Ινδοαραβικό ενώ η προφορική ουσιαστικά δεν έχει αλλάξει από την εποχή πριν από τον Όμηρο, απλώς έχει κανονικοποιηθεί με μία αλλαγή στους συντακτικούς της κανόνες.

Για μεγάλα χρονικά διαστήματα δεν υπήρχε αντιστοιχία της συμβολικής με την καθομιλούμενη. Η σειρά γραφής των συμβόλων σ' ένα αθροιστικό σύστημα δεν έχει καμιά σημασία. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι οι Έλληνες δεν είχαν κάποια προτίμηση στη σειρά. Η τάση που είχε παγιωθεί ως κυρίαρχη ήταν το γράψιμο των μονάδων μεγαλύτερης τάξης πρώτα και στη συνέχεια οι μονάδες μικρότερης τάξης. Όμως, αν κρίνουμε από τον τρόπο που εκφωνούσαν τους αριθμούς στον Ελλαδικό χώρο, θα πρέπει σε μια πρωταρχική περίοδο να έγραφαν πρώτα τις μονάδες μικρότερης τάξης αφού για το 19, στο Όμηρο συναντάμε το *εννεακαίδεκα*, για το 13 το *τρισκαίδεκα* ενώ ο Θουκυδίδης το 135 το γράφει «*πέντε και τριάκοντα και εκατόν*» [Θουκυδίδης, Ιστορία, 6.5.3.2]. Ίσως η συνήθεια αυτή να είναι ανάμνηση του κυρίαρχου τρόπου γραφής στο Ακροφωνικό, αφού η πιο λογική υπόθεση είναι ότι αναπαριστούσαν τους αριθμούς όπως τους εκφωνούσαν. Η συνήθεια αυτή στον προφορικό λόγο παρέμεινε για πολλούς αιώνες μετά την καθιέρωση του Ιωνικού, συνυπάρχοντας, από ένα στάδιο και μετά, με την αναστροφή της (με εξαίρεση το *ένδεκα* και

το δώδεκα).στην οποία όμως οι λέξεις δεν συνδέονται πλέον με το και: «εκατόν τριάκοντα πέντε ». Το βήμα αυτό εναρμόνισης συμβολικού με τον προφορικό λόγο στα πλαίσια της Ελληνικής γλώσσας, είναι πολύ σημαντικό όχι μόνο επειδή αποκατέστησε αντιστοιχία εκφοράς και συμβολισμού αλλά πολύ περισσότερο κανονικοποιήθηκε η γραμματική η οποία παράγει τον Ελληνικό προφορικό λόγο για τους αριθμούς.

Η γραμματική που παράγει την καθομιλούμενη γλώσσα των αριθμών στην περίπτωση της Ελληνικής είναι:

- (1) $S \rightarrow 0$
- (2) $S \rightarrow xA \quad x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (εννέα τέτοιες παραγωγές)
- (3) $A \rightarrow yA \quad y \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (δέκα τέτοιες παραγωγές)
- (4) $A \rightarrow \lambda$

Αλφάβητο (πεπερασμένο) το : $M \cup \Delta \cup E \cup X$ όπου

- $M = \{\text{μηδέν, ένα, δύο, ...εννέα}\}$
 $\Delta = \{\text{δέκα, είκοσι, τριάντα, ...ενενήντα}\}$
 $E = \{\text{εκατό, διακόσα, ... εννιακόσα}\}$
 $X = \{\text{χίλια, εκατομμύριο}\}$

Παραγωγές

1. $S \rightarrow A \quad A \rightarrow x, \quad x \in M$ (δέκα τέτοιες παραγωγές)
2. $S \rightarrow BA \quad B \rightarrow y, \quad y \in \Delta$
3. $S \rightarrow \Gamma BA \quad \Gamma \rightarrow z, \quad z \in E$
4. $S \rightarrow K \Gamma BA \quad K = \text{χίλια}$
5. $S \rightarrow \Gamma BA \Lambda \Gamma BA \quad \Lambda = \text{χιλιάδες}$
6. $S \rightarrow \Gamma A B N \quad N = \text{εκατομμύριο}(\alpha)$
7. $A \rightarrow \lambda$
8. $B \rightarrow \lambda$
9. $\Gamma \rightarrow \lambda$

Και τα ονόματα μεγαλύτερων ακόμα αριθμών παράγονται από κανονική γραμματική αφού αυτά παράγονται σύμφωνα με τον αναλυτικό τύπο

$$k \cdot 10^{3(n+1)}, k < 10^3, n \in \mathbb{N}$$

όπου:

για $n=0$: για $k=1$ εκφωνούμε *χίλια*, ενώ για $k>1$, k χιλιάδες

για $n=1$: k εκατομμύρια

για $n=2$: k δυσεκατομμύρια

για $n=3$: k τρεισεκατομμύρια

και για $n>3$: k n -άκις εκατομμύρια (κάπα νιάκις εκατομμύρια)

Για παράδειγμα το φυσικό όνομα του αριθμού 10^{63} είναι ένα εικοσάκις εκατομμύριο αφού $10^{63}=1 \cdot 10^{3(20+1)}$. Ενώ του $52 \cdot 10^{112}$ είναι $52 \cdot 10^{112}=520 \cdot 10^{3(36+1)}$, οπότε το όνομά του είναι πεντακόσια είκοσι τριανταεξάκις εκατομμύρια.

Έτσι η Ελληνική ονοματολογία των αριθμών παράγεται από μια κανονική γραμματική (γραμματική αριστερά), μια **γραμματική δηλαδή της ίδιας φύσης** με αυτήν που παράγει τη συμβολική γλώσσα των αριθμών στο θεσιακό σημερινό σύστημα. Η κανονικότητα αυτή την καθιστά πολύ απλή στη μάθησή της. Είναι εξάλλου χαρακτηριστικό ότι όταν τα παιδιά έχουν αντιληφθεί αυτήν την κανονικότητα, αρέσκονται συχνά να κάνουν λογοπαίγνιο με το *έντεκα* και το *δώδεκα*, εκφωνώντας τα *δεκαένα* και *δεκαδύο*. Αν δεχθούμε τώρα την ενότητα γλώσσας και σκέψης κατά τη γνωστική διαδικασία [Vygotski, 1934, 1988, σ.356], η αξιοποίηση αυτής της κανονικότητας πρέπει να είναι πολύ σημαντική για την εξοικείωση με τις έννοιες των αριθμών. Με αυτά τα δεδομένα γίνεται επίσης φανερό ότι μελέτες και παρατηρήσεις για το πώς μαθαίνουν τα παιδιά τους αριθμούς που έχουν γίνει σε μη Ελληνόφωνο δείγμα, δεν μπορούν να μεταφερθούν αυτούσιες σε Ελληνόφωνο.

Παραδείγματα:

- i. Ο αριθμός 13×10^{64} γράφεται $130 \times 10^{63}=130 \times 10^{3(20+1)}$ οπότε το όνομά του είναι: *εκατό τριάντα εικοσάκις εκατομμύρια*.
- ii. Ο αριθμός 315×10^{51} γράφεται $31500 \times 10^{51}=31500 \times 10^{3(16+1)}$ οπότε το όνομά του είναι: *τριανταμία χιλιάδες πεντακόσια δεκαεξάκις εκατομμύρια*.

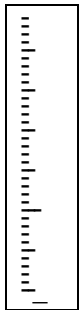
Ασκήσεις

- 1) Πιο το όνομα στη νεοελληνική γλώσσα του καθενός από τους παρακάτω αριθμούς:
 15×10^{71} , 323×10^{95} , 37×10^{344}

4.4 Οι γλώσσες των φυσικών αριθμών και η φυσική γλώσσα.

4.4.1 Η γέννηση της γραφής

Η πρώτη προσπάθεια του ανθρώπου να «γράψει», να χαράξει δηλαδή μια απλή χαρακιά, ένα απλό σχέδιο, ένα γράφημα πάνω σε μια επιφάνεια, που να είναι φορέας νοήματος, ήταν σχετική με την έννοια της πληθικότητας. Η αρχαιότερη δηλαδή γλώσσα που γράφτηκε ήταν μια πρωτόλεια συμβολική γλώσσα των αριθμών. Πρόκειται για το κόκαλο του λύκου που έχει βρεθεί το 1973 από τον Karl Absolon στην Τσεχοσλοβακία και που **χαράχτηκε, από κάποιο νοήμον προφανώς υποκείμενο, πριν 30.000 περίπου χρόνια.**



Πάνω στο κόκαλο αυτό υπάρχουν τρία είδη από εγχοπές οργανωμένες σε πεντάδες και εικοσιπεντάδες. Η ανάγκη για αποτύπωση μιας, καταμετρημένης με τη μέθοδο της ένα προς ένα αντιστοίχισης, πληθικότητας, οδηγεί στην εγχάραξη των εγχοπών. Η ανάγκη για γρήγορη αναγνώριση οδηγεί στην οργάνωση των εγχοπών σε πεντάδες και εικοσιπεντάδες. Δεν γνωρίζουμε αν οι άνθρωποι που χάραξαν τις εγχοπές αυτές διέθεταν και ακολουθίες ήχων για να δηλώνουν τις πληθικότητες που αποτύπωναν,

πιθανότατα πως όχι. Επίσης δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι πρόκειται για την αποτύπωση μιας πληθικότητας σημαντικής ή για ένα είδος προτύπου για καταμετρήσεις συνόλου, ένα πρωτόγονο δηλαδή αριθμητήριο. Αυτό που είναι αναμφίβολο είναι ότι εμπεριέχει δύο πολύ σημαντικές έννοιες, πρωταρχικές για την ανάπτυξη της γλώσσας των αριθμών, την έννοια της ένα προς ένα αντιστοίχισης και την έννοια της ομαδοποίησης, δηλαδή της βάσης.

Η ανάγκη για καταγραφή του αριθμού, είτε αυτός ήταν ζώα είτε καλάθια με καρπούς ή οτιδήποτε άλλο ανταλλάξιμο, οδήγησε από τις απλές χαρακίες σε πιο περίπλοκες παραστάσεις για μεγάλους αριθμούς. Όμως «επειδή μπορούσαν να ξεχάσουν τί ήταν αυτό που είχε καταγραφεί, το σύμβολο του αριθμού το ακολουθούσε μια εικόνα ή ένα στενογραφημένο σύμβολο του αντικειμένου, που υποδείκνυε τι ήταν αυτό που είχε μετρηθεί» [J. Bernal, 1954, Τόμ.1,σ.184]

Έτσι εμφανίστηκε η γραφή. Οι άνθρωποι άρχισαν στην αρχή να ζωγραφίζουν τα αντικείμενα, ή τους ήχους που τα αντιπροσώπευαν, για να φτάσουν σε πιο εξελιγμένες μορφές γραφής όπως το συλλαβικό και αργότερα το φθογγικό αλφάβητο.

4.4.2 *Ενικός-Πληθυντικός*

Η ανάπτυξη της πολύ ειδικής γλώσσας των αριθμών και συγκεκριμένα η καθιέρωση και πλατιά χρήση ενός εύχρηστου αριθμητικού συστήματος οδήγησε στην ομαλοποίηση της καθομιλουμένης σε σχέση με την έκφραση της απαριθμήσιμης πολλαπλότητας, τη σταδιακή εγκατάλειψη του δυϊκού αριθμού και την υποβάθμιση του συλλογικού. Πρόκειται για την πιο σημαντική δομική αλλαγή που έχει υποστεί η φυσική γλώσσα κάτω από την επίδραση της γλώσσας των αριθμών.

Για τη γραμματική κατηγορία του αριθμού και την εξέλιξή της στην καθομιλουμένη ο Jean Humbert [HUMB.1960,15,24] αναφέρει ότι η Ελληνική γλώσσα μαζί με τον *ενικό* και τον *πληθυντικό*, διατήρησε για μεγάλο διάστημα το *δυϊκό*, και το *συλλογικό* ("πληθυντικός" του ουδετέρου). Παρά την ταυτότητα των όρων, ο *ενικός* και ο *πληθυντικός* της αρχαίας Ελληνικής είναι πολύ διαφορετικοί από τους σημερινούς, για δύο λόγους: Δεν βρίσκονται στην ίδια σχέση μεταξύ τους ενώ ο συλλογικός κατέχει πολύ σημαντική θέση.

Συγκεκριμένα:

Ο *ενικός* κατέχει μια θέση εντελώς αρνητική σε σχέση με τον αριθμό, σημαίνει δηλαδή την απουσία αριθμού.

Η έννοια της πολλαπλότητας μπορεί να εκφραστεί, είτε από τον *πληθυντικό*, είτε από το *συλλογικό*, είτε από *ενικό* με αξία *συλλογικού*. Υπάρχουν δηλαδή τρεις περιπτώσεις για την έκφραση της πολλαπλότητας:

α) Όταν η έννοια της πολλαπλότητας πρέπει να εφαρμοσθεί σε αντικείμενα αριθμήσιμα: ο αριθμός που χρησιμοποιείται είναι ο *πληθυντικός*.

β) Όταν η έννοια της πολλαπλότητας πρέπει να εφαρμοσθεί σε ένα αντικείμενο του οποίου όμως η δομή είναι σύνθετη: χρησιμοποιείται *πληθυντικός*.

γ) Όταν η έννοια της πολλαπλότητας πρέπει να εφαρμοσθεί σε αντικείμενα που δεν ζητάμε να απαριθμήσουμε: Είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί είτε ο *ενικός*, αν θεωρούμε συνολικά τη μάζα που συνιστούν τα αντικείμενα, είτε ο *πληθυντικός*, αν θεωρούμε την ενδογενή πολλαπλότητα αυτής της μάζας. Έτσι στην περίπτωση (γ) όταν λέμε:

καθένας από τους φίλους μου ήλθε

ή:

Όλοι οι φίλοι μου ήλθαν

εκφράζουμε με τον *ενικό* ή τον *πληθυντικό* μια πληθικότητα την οποία δεν ενδιαφερόμαστε να απαριθμήσουμε.

Καθώς τα αρχαία Ελληνικά διαθέτουν έναν *συλλογικό* με τη μορφή του "*πληθυντικού του ουδετέρου*" μπορούν σ' αυτήν την περίπτωση να εκφράσουν:

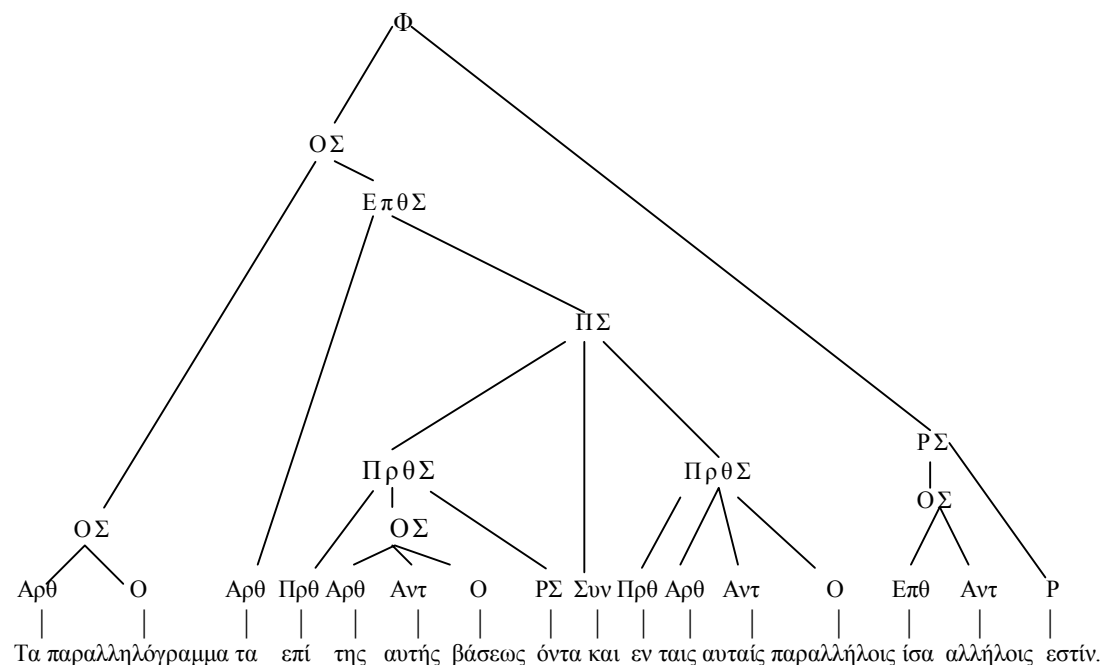
- την πληθικότητα: *Πάντες οι φίλοι ήλθον* (πληθυντικός)

- την επιμεριστική μοναδικότητα: *Εκαστος των φίλων ήλθε* (ενικός)
- τη συνολική μοναδικότητα: *Τα φίλα πάντα ήλθε* (συλλογικός εκφρασμένος από το ουδέτερο του "πληθυντικού").

Το ρήμα παραμένει στον ενικό συμφωνώντας με το υποκείμενο που εννοείται, δηλαδή το σύνολο των φίλων (που ήλθε) και όχι αυτό που διατυπώνεται. Σαν κλασικό παράδειγμα αττικής σύνταξης αναφέρεται η φράση *Τα ζώα τρέχει* που σημαίνει *Κάθε ζώο τρέχει*, ή *Το σύνολο των ζώων τρέχει*.

Η μαθηματική γλώσσα της εποχής, αξιοποιεί το συλλογικό αριθμό για να εκφράσει την καθολική ποσόδειξη:

Παράδειγμα: «Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.» [Ευκλείδης, I, 35]



Το όνομα {τα παραλληλόγραμμα} είναι συλλογικός που σημαίνει {κάθε παραλληλόγραμμο} και εκφράζει μια καθολική ποσόδειξη, τίθεται δε πάντα στην αρχή της εκφώνησης όπως στο παραπάνω δέντρο ανάλυσης. Ο ρόλος αυτός του συλλογικού τον καθιστά λειτουργικό για το μαθηματικό λόγο. Αυτός πιστεύουμε είναι ο λόγος που τον διατηρεί σε χρήση στα μαθηματικά κείμενα, ενώ στην καθομιλουμένη, όπως παρατηρεί ο [HUMB.1960, 24] αρχίζει να εγκαταλείπεται, ήδη από συγγραφείς όπως τον Ξενοφώντα - μια γενιά περίπου πριν από τον Ευκλείδη - ενώ έχει εξαφανιστεί στη Κοινή το 100 π.χ. περίπου.

Αξιίζει να αναφέρουμε τη γνώμη του Β. Μανδηλαρά για την αιτία εξαφάνισης του δυϊκού (τω οφθαλμω=τα δύο μάτια, τω χειρε=τα δύο χέρια): «παρατηρήθηκε βαθμιαία εξαφάνιση του δυϊκού στις κοινωνίες, όπου ο άνθρωπος εξελισσόταν πνευματικώς. Στην ιωνική διάλεκτο π.χ., σε μια γλώσσα, η οποία χαρακτηρίζεται για την πνευματική της

ανάπτυξη, δεν μαρτυρείται χρήση του δυϊκού αριθμού. Αντίθετα, στις αγροτικές διαλέκτους (θεσσαλική, βοιωτική), διαφυλάσσεται ο δυϊκός αριθμός. Στην αττική διάλεκτο διατηρείται ζωηρά, ώσπου νέα κοινωνικά στρώματα συντελούν στην τέλεια εξαφάνισή του. Αυτό συμβαίνει μέσα στον 4^ο αι. π.χ.» [ΜΑΝΔ..1981, 31].

Νομίζουμε ότι η πλατειά χρησιμοποίηση ενός εύχρηστου συστήματος αρίθμησης αποτέλεσε την υλική αιτία για την εξέλιξη αυτή, αφού η γλώσσα πλάθεται από το λαό. Στην Αττική, η εξέλιξη αυτή ήταν σχετικά πρόσφατη (!) αφού μάλλον κατά το 403 μόλις π.Χ. [Mioni,1979, 55] υιοθετήθηκε με προτροπή του ρήτορα Αρχίνου από τους Αθηναίους το Ιωνικό αλφάβητο για την καθομιλουμένη, οπότε είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι υιοθετήθηκε μαζί και το αριθμητικό σύστημα των Ιώνων: «τοὺς δὲ Ἀθηναίους ἔπεισε χρῆσθαι τοῖς τῶν Ἰώνων γράμμασιν Ἀρχῖνος [δ' Ἀθηναίοις] ἐπὶ ἄρχοντος Εὐκλείδου» (περί το 403/2 π.Χ.)

Ο Ελληνικός Μαθηματικός Λόγος

5. Η μαθηματική γλώσσα

5.1 Μικρή ιστορική αναδρομή

Η συγκρότηση μιας ειδικής γλώσσας, όπως η μαθηματική, προϋποθέτει τη διαμόρφωση της κοινωνικής αυτής ομάδας που θα δραστηριοποιείται συστηματικά γύρω από μια πολύ συγκεκριμένη, στη συγκεκριμένη περίπτωση αυστηρά οριοθετημένη, γνωστική περιοχή, την επιστήμη των μαθηματικών. Ποίοι όμως είναι οι όροι που έφεραν στο προσκήνιο της ιστορίας τη γλώσσα της επιστήμης των μαθηματικών; Στην ιστορία των μαθηματικών μπορούμε να διακρίνουμε τρία στάδια:

- Το προεπιστημονικό εμπειρικό που φτάνει μέχρι το Θαλή, ο οποίος, σύμφωνα με τον Πρόκλο, διατύπωσε τα πρώτα θεωρήματα.
- Το στάδιο του ραγδαίου ποιοτικού μετασχηματισμού του συνόλου των συσσωρευμένων εμπειρικών γνώσεων που φτάνει μέχρι τον Ευκλείδη, ο οποίος κατέγραψε ως αξιωματικοποιημένη παραγωγική επιστήμη, σε δεκατρία βιβλία τα γνωστά *Στοιχεία*, τα μαθηματικά της εποχής του.
- Και, το στάδιο της σχετικά αυτοτελούς ανάπτυξής τους.

Τι σημαίνει όμως επιστήμη για την εποχή εκείνη και γιατί απαιτείται νέα γλώσσα για να την εκφράσει; Αξίζει να εκθέσουμε με συντομία την μοναδική ολοκληρωμένη άποψη που έχει διασωθεί, αυτήν του Αριστοτέλη, η οποία δεν έχει μόνο ιστορική αξία αλλά και άμεση πρακτική ακόμα και σήμερα!

Για τον Αριστοτέλη λοιπόν, ως επιστήμη δεν γίνεται αποδεχτό ένα οποιοδήποτε σύνολο γνώσεων ή δοξασιών που αφορούν απλά μια γνωστική περιοχή, χωρίς κανένα περιορισμό στην οργάνωση, τη λογική δομή και τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων. Αν ήταν έτσι τα πράγματα, τότε και η αστρολογία των Βαβυλώνιων, ή των Αιγυπτίων - ή και η σημερινή - και τα μαθηματικά τους, η μαντεία κ.τ.λ., θα ήταν επιστήμες, και η αναζήτηση του *επιστημονικού λόγου* θα χανότανε στα βάθη των αιώνων.

Κατά τον Αριστοτέλη λοιπόν ένα σύνολο γνώσεων αποτελεί επιστήμη μόνο αν:

1. Τα αντικείμενα της επιστήμης έχουν εξασφαλισμένη ύπαρξη, είτε από αξιώματα είτε από τις αποδείξεις.
2. Ορισμένα γεγονότα μεταξύ των αντικειμένων αυτών συμβαίνουν «εκ φύσεως». Δηλαδή κάποιες αποφάνσεις γίνονται αποδεκτές ως αληθείς, χωρίς απόδειξη, από όλους όσοι ασχολούνται ή επιθυμούν να ασχοληθούν με την επιστήμη αυτή. Δεν είναι καθόλου τυχαίο ότι οι αποφάνσεις αυτές εισάγονται

από τον Ευκλείδη με προστακτικές παρακειμένους: *ῥητήσθω* στα Στοιχεία, *ὑποκείσθω* στα Οπτικά και τα Φαινόμενα.

3. Οποιαδήποτε άλλη απόφαση (δηλ. θεώρημα) εντάσσεται μέσα στο πλαίσιο της επιστήμης μόνο αν είναι λογική συνέπεια των προηγούμενων αποφάνσεων, δηλαδή αν είναι προϊόν επιστημονικού συλλογισμού, επιστημονικός δε είναι μόνο ο συλλογισμός ο οποίος στηρίζεται σε αληθείς προκειμένες. Την αντίληψη ότι και τα θεωρήματα, όπως και τα αιτήματα, εκφράζουν γεγονότα που συμβαίνουν στον πραγματικό κόσμο τη συναντάμε αργότερα και στον Αρχιμήδη ο οποίος γράφει, στην εισαγωγή του έργου του “*Περί σφαίρας καί κυλίνδρου*” η οποία απευθύνεται στον Δοσίθεο:

Ταῦτα δὲ τὰ συμπτώματα τῇ φύσει προυπήρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, ἡγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινενοηκότος ὅτι τούτων τῶν σχημάτων ἐστὶν συμμετρία·

Αυτές δε οι κανονικότητες στα σχήματα που έχω αναφέρει προϋπήρχαν από τη φύση τους. Τις αγνοούσαν δε αυτοί που ασχολήθηκαν με τη γεωμετρία πριν από μένα, αφού κανείς δεν κατάλαβε πως υπάρχουν αναλογίες μεταξύ των σχημάτων αυτών.

Έτσι τα μαθηματικά είναι ιστορικά το πρώτο παράδειγμα επιστήμης που διαθέτουμε. Ο επιστημονικός λόγος υπήρξε ο ώριμος καρπός του Ελληνικού Ορθολογισμού που εμφανίστηκε στις Ιωνικές πόλεις της Μικράς Ασίας από το 600 περίπου π.Χ. και μετά.

Ορόσημο αποτελεί η στάση απέναντι στο πρόβλημα της αλήθειας, όπου η λογικά τεκμηριωμένη αλήθεια εκτοπίζει την εξ’ αποκαλύψεως αλήθεια του ιερατείου, και η διατύπωση από το Θαλή των πρώτων θεωρημάτων, ως γενικεύσεις εμπειρικών κανόνων κατακτημένων κατά το προεπιστημονικό στάδιο, αναπτύχθηκε μέσα στη μήτρα του Φιλοσοφικού Λόγου της εποχής, για να αυτονομηθεί στη διάρκεια των 300 χρόνων που ακολούθησαν μέχρι τον Ευκλείδη.

Το σύνολο των γνώσεων και των πρακτικών του προεπιστημονικού εμπειρικού σταδίου ο Αριστοτέλης το ονομάζει *τέχνη των μαθηματικών*, σχολιάζοντας δε στους κοινωνικούς όρους εμφάνισής του αναφέρει ως παράδειγμα κοινωνικής ομάδας που ασχολείται με την τέχνη αυτή το Αιγυπτιακό ιερατείο, το οποίο, έχοντας εξασφαλισμένους τους όρους της υλικής του διαβίωσης από την εργασία των άλλων, διαθέτει ελεύθερο χρόνο για πνευματικές ασχολίες:

διὸ περὶ Αἴγυπτον αἱ μαθηματικαὶ πρῶτον τέχναι συνέστησαν, ἐκεῖ γὰρ ἀφείθη σχολάζειν τὸ τῶν ἱερέων ἔθνος.

Γιαυτό οι μαθηματικές τέχνες εμφανίστηκαν στην Αίγυπτο, διότι εκεί έτυχε να είναι αργόσχολο το γένος των ιερέων.

[Αριστοτέλης, *Μετά τα φυσικά*, 981b.23 έως 981b.27].

Η γνώση όμως είναι παράγωγο της κοινωνίας και συγχρόνως λειτουργικό της στοιχείο, καθορίζεται απ' αυτήν αλλά και την καθορίζει. Τα μαθηματικά αποτελούν μια γνωστική περιοχή αυστηρά οριοθετημένη, όπως την ήθελε ήδη ο Αριστοτέλης, εκφράζονται μέσω μιας εξειδικευμένης γλώσσας της μαθηματικής γλώσσας. Υλοποίηση της γλώσσας αυτής αποτελεί ο μαθηματικός λόγος ο οποίος στην πρώτη του ιστορικά εκδοχή δεν είναι άλλος από τον Ελληνικό μαθηματικό λόγο των διασωθέντων κειμένων της κλασσικής αρχαιότητας.

Η μαθηματική γλώσσα γεννήθηκε μέσα στα πλαίσια της φυσικής γλώσσας με σημασιολογικές διαφοροποιήσεις των εκφραστικών μέσων της καθομιλουμένης. Δηλαδή η μαθηματική γλώσσα διαφοροποιείται, σ' εκείνη τη φάση, από την καθομιλουμένη μόνο ως προς το σύστημα των σημασιολογικών κανόνων, ενώ διατηρεί το ίδιο αλφάβητο και την ίδια σύνταξη. Εκείνο δε που θεσμοθετεί τις σημασιολογικές αυτές διαφοροποιήσεις είναι οι μαθηματικοί ορισμοί. Ο μαθηματικός ορισμός είναι ουσιαστικά μια συμφωνία για το νέο περιεχόμενο του όρου που εισάγεται στο λεξιλόγιο της νέας γλώσσας, οριοθετεί δηλαδή σημασιολογικά τη νέα γλώσσα.

Για παράδειγμα, το όνομα *κύκλος* υπάρχει στην καθομιλουμένη γλώσσα, με πεδίο σημασίας το περιβάλλον δραστηριότητας του ανθρώπου, πολύ πριν από την εμφάνιση του ορισμού που συναντάμε στα στοιχεία του Ευκλείδη. Ταυτόχρονα οι μαθηματικοί ασχολούνται με το μαθηματικό αντικείμενο¹ *κύκλος* πολύ πριν αποφασίσουν ότι απαιτείται να δηλώσουν με απόλυτη ακρίβεια τι εννοούν. Έτσι με τον ορισμό:

Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἢ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἅφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Κύκλος είναι ένα σχῆμα ἐπίπεδο που περιέχεται από μια γραμμή [η οποία καλεῖται περιφέρεια] προς την οποία όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που φτάνουν, αρχίζοντας από ένα εσωτερικό τη γραμμῆς αυτής σημείο, είναι ἴσα μεταξύ τους.

[Ευκλ. I, Ορ.15]

η λέξη *κύκλος* έχει πεδίο σημασίας το σύμπαν, πλέον, των μαθηματικών αντικειμένων.

Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι η εμφάνιση του μαθηματικού ορισμού αποτελεί τη ληξιαρχική πράξη γέννησης της μαθηματικής γλώσσας.

¹ Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου έχει τεθεί εκατό τουλάχιστον χρόνια πριν από τον Ευκλείδη, και αρκετά πριν ο Πλάτωνας καταπιαστεί, μέσα στα πλαίσια της διαλεκτικής με το πρόβλημα της αναγκαιότητας των Ορισμών (βλ. Σοφιστής).

Όλη η μαθηματική ορολογία αντλείται σ' αυτό το στάδιο από τη καθομιλούμενη γλώσσα, αποτυπώνοντας ταυτόχρονα τον έντονα εμπειρικό ακόμα χαρακτήρα των μαθηματικών. Ήδη από την εποχή των Πυθαγορείων εμφανίζονται σοβαρές σημασιολογικές διαφοροποιήσεις, που προμηνύουν την συγκρότηση μιας ειδικής γλώσσας για τις ανάγκες της υπό διαμόρφωση επιστήμης:

Παραδείγματα:

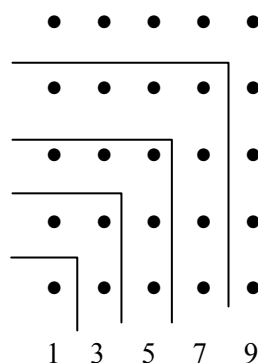
Από τις πρακτικές δε διαδικασίες των Πυθαγορείων, πάνω στην ψηφοφόρο, την ξύλινη δηλαδή επιφάνεια πάνω στην οποία αναπαριστούσαν τους αριθμούς με ψηφίδες - το ένα (που δεν ήταν αριθμός) με μία ψηφίδα, το 2 με δυο ψηφίδες, το 3 με τρεις στη σειρά και κάθε επόμενο προσθέτοντας μία ψηφίδα στον προηγούμενο - δημιουργήθηκε ένα μεγάλο μέρος από την ορολογία της γλώσσας της αριθμητικής:

Προσθέτω – πρόσθεση: Από το *προς+τίθιμι*, θέτω δηλαδή τις ψήφους του ενός αριθμού ακριβώς δίπλα από τις ψήφους του άλλου ώστε να σχηματίζουν έναν αριθμό

Αφαιρώ-αφαίρεση: Από το: *από+αίρω*, παίρνω με το χέρι (αρπάζω) από. Έπαιρναν λοιπόν με το χέρι από την αναπαράσταση του αφαιρέτη όσες ψήφους είχε ο αφαιρεταίος.

Ανάλογα με τις εικόνες που έδιναν οι ψηφίδες ενός αριθμού, όταν με διάφορους τρόπους αναδιατασσόταν πάνω στην ψηφοφόρο, Πυθαγόρειοι τους ονόμαζαν: *επίπεδους* αν έδιναν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο όπως οι 6, 10, 12, 14, αν δηλαδή ήταν γινόμενο δύο παραγόντων, *τετράγωνους* αν έδιναν τετράγωνο (4,9,16,...), *στερεούς* αν ήταν γινόμενο τριών παραγόντων, *κύβους* αν οι τρεις παράγοντες ήταν ίσοι κλπ.. Από τη διαδικασία όμως αυτή παρήχθησαν και νεολογισμοί που πέρασαν και στην καθομιλούμενη γλώσσα πλουτίζοντάς την:

Περιττός: Από την πρόθεση *περί* (*περί* *περισσός*, που έγινε *περιττός* στην αττική διάλεκτο) υπαγορευμένο από την εξής διαδικασία: Κάθε επόμενος από την ακολουθία των αριθμών 1, 3, 5, 7,... τοποθετείται, με τη βοήθεια του γνώμονα, *περί* τον προηγούμενο σχηματίζοντας μαζί με όλους τους άλλους ένα τετράγωνο αριθμό:



Η γενίκευση είναι προφανής: $1+3+5+7+\dots+(2n-1)=n^2$

Οι αριθμοί λοιπόν που μπορούσαν να τοποθετηθούν *περί* ονομάστηκαν *περισσοί*, που έγινε *περιττοί* στην Αττική διάλεκτο. Από το *περισσός* παράγεται μετά το *περισσάκις* που σημαίνει περιττό αριθμό από φορές.

Ο Πλάτωνας στην *Πολιτεία* σχολιάζει την εμπειρική αυτή προέλευση της μαθηματικής ορολογίας γράφοντας ότι:

Μιλούνε δε (για τα μαθηματικά) με πολύ γελοίο τρόπο, αλλά αναγκαστικά, σαν να πράττουν με υλικά αντικείμενα και για χάρη αυτής της πράξης να φτιάχνουν αυτά τα λόγια, λένε να τετραγωνίζεις και να προεκτείνεις και να προσθέτεις και για όλα έτσι μιλούν,

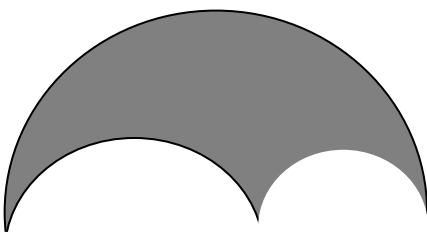
Λόγος, ανάλογος, ομόλογος, αναλογία: Η λέξη *λόγος*, από το *λέγω*, είχε στη φυσική γλώσσα πάμπολλες σημασίες ήδη την εποχή των Πυθαγορείων. Τρεις απ' αυτές: ομιλία-λαλιά, εκφωνώ αριθμούς-αριθμός, σειρά ή σύνολο αντικειμένων αποτέλεσαν την αφετηρία στο να αποκτήσει μια νέα σημασία μέσα στα πλαίσια της μουσικής θεωρίας των Πυθαγορείων. Κατά την προσπάθειά τους να μελετήσουν το Μονόχορδο, ονόμαζαν *λόγο* το ζεύγος των αριθμών που δήλωναν τα άκρα του τμήματος της χορδής που ήταν χωρισμένη σε 12 τμήματα. Εξέφρασαν έτσι τα μουσικά διαστήματα με αριθμητικές σχέσεις. Τα τρία βασικά σύμφωνα διαστήματα αντιστοιχούσαν πάντα στα πηλικά 12:6(=2:1) η οκτάβα, 12:9(=4:3) η τετάρτη και 12:8(=3:2) η πέμπτη. Το πηλίκον αυτό ονομάστηκε *λόγος*. Τέσσερα μεγέθη που εμφάνιζαν ισότητα λόγων ονομάστηκαν *ανά λόγον ίσα μεγέθη*. Από τη φράση αυτή δημιουργήθηκε η ελλειπτική έκφραση *ανά λόγον* η οποία σε όλα τα μαθηματικά κείμενα εμφανίζεται ως μια λέξει *ανάλογον* που εμφανίζεται άκλιτη:

Τα μεγέθη που έχουν τον ίδιο λόγο να ονομάζονται ανάλογα

[Ευκλείδης, V, Ορ.6]

Όλοι αυτοί οι νεολογισμοί, πλασμένοι μέσα στη μαθηματική γλώσσα, πέρασαν σταδιακά στη καθομιλούμενη. Κατά τον A.Szabó η εισαγωγή των όρων αυτών στην καθομιλουμένη οφείλεται στον Πλάτωνα, [SZABO,1969,159]. Πράγματι η λέξη *αναλογία* εμφανίζεται για πρώτη φορά, με βάση τα διασωθέντα κείμενα, στον Πλάτωνα: [Πλάτων, Πολιτεία, 508 b,13]

Και μετά την συγκρότηση των μαθηματικών σε επιστήμη η καθομιλούμενη συνεχίζει να παρέχει λεξιλόγιο για ορολογία, όπως άλλωστε γίνεται ακόμα και σήμερα. Για παράδειγμα το καμπύλο μαχαίρι των εκδορέων, το λεγόμενο *άρβηλος* [Σούδα, Λεξικόν], εμπνέει στον Αρχιμήδη το όνομα για το γεωμετρικό σχήμα με το οποίο ομοιάζει:



Λέγω δε το σχήμα, που περιέχεται από τρεις περιφέρειες δηλαδή από το μεγάλο ημικύκλιο και τα δύο ημικύκλια που έχουν εγγραφεί σ' αυτό, το οποίο ας έχει ονομασθεί **άρβυλος**.

[Αρχιμήδης, Προβλήματα]

5.2 Η γλώσσα του Ευκλείδη και η υπέρβασή της

Σε ένα λοιπόν πρωταρχικό στάδιο στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών, χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά η καθομιλουμένη με τις απαραίτητες, για τη δημιουργία της μαθηματικής ορολογίας, σημασιολογικές διαφοροποιήσεις. Ταυτόχρονα παγιώνεται η χρήση ορισμένων συντακτικών δομών για να αποδοθούν ιδιαίτερα λεπτές εννοιολογικές αποχρώσεις. Οι προστακτικές, για παράδειγμα, αναλαμβάνουν έναν ιδιαίτερο ρόλο στην παρουσίαση των υποθέσεων, στην παρουσίαση και υπαρξιακή ποσόδειξη μαθηματικών αντικειμένων, αλλά και στη σταδιακή θεώρηση των γεωμετρικών σχημάτων. Για τους Γεωμέτρους της κλασικής αρχαιότητας το σχήμα ως αναπαράσταση κάποιου γεωμετρικού αντικειμένου υπάρχει ανεξάρτητα από το γεωμέτρη. Έτσι το σχήμα δεν κατασκευάζεται από τον γεωμέτρη αλλά θεωρείται σταδιακά. Ενώ δηλαδή εμείς λέμε «φέρνω την AB» αυτοί έλεγαν «ας έχει αχθεί η AB». Δεν είναι λοιπόν καθόλου τυχαίο ότι η προστακτικές συναγωνίζονται σε συχνότητα τις οριστικές.

Γενικά για κάθε λογικογλωσσική πράξη έχει παγιωθεί μία, κατά κανόνα, συντακτική δομή που την εκφράζει. Ως προς τη συνολική δομή τα μέρη του μαθηματικού λόγου που έχουν παγιωθεί είναι η *πρόταση* (εκφώνηση του προβλήματος ή του θεωρήματος) η *έκθεση* (παρουσίαση και ποσόδειξη των αντικειμένων) ο *διορισμός*, η *κατασκευή* (στη γεωμετρία) η *απόδειξη*, και το *συμπέρασμα*. Ο μαθηματικός λόγος λοιπόν της εποχής του Ευκλείδη, έστω και χωρίς συμβολισμό, είναι, με τον τρόπο του, τυποποιημένος.

Όμως με την ανάπτυξη και εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, η ανεπάρκεια των εκφραστικών μέσων, η ανάγκη μονοσημίας, η τάση για οικονομία στα εκφραστικά μέσα και συμπίκνωση της εκφράσιμης πληροφορίας, οδήγησαν στην ανάπτυξη στα πλαίσια της μαθηματικής γλώσσας του μαθηματικού συμβολισμού.

Το σύμβολο γενικά, ως προς τη σημασία του, είναι ένα σημείο (signe) που αντικαθιστά (ή παριστά) μια αφηρημένη έννοια, δηλαδή κάτι που αν και έχει κάποια σχέση με τον υλικό κόσμο, το ίδιο δεν είναι υλικό αντικείμενο. Η αναπαράσταση αυτή βασίζεται σε μία σύμβαση που πρέπει να είναι γνωστή για να κατανοηθεί το σύμβολο. Η ίδια αφηρημένη έννοια μπορεί να παρασταθεί με ένα σύμβολο ή με ένα γλωσσικό σημείο που συνήθως είναι το όνομά της. Τα μαθηματικά σύμβολα αποτελούν ένα είδος νέων γλωσσικών σημείων τα οποία αρχίζουν να αντικαθιστούν ορισμένα γλωσσικά σημεία ή και ολόκληρες φράσεις που προέρχονται από την καθομιλουμένη.

Έτσι η φράση,

«όπως είναι ο A προς τον E είναι και ο Γ προς τον Δ »

[Ευκλείδης, VIII,14]

που συναντάμε πολύ συχνά στα Στοιχεία του Ευκλείδη μπορεί να αποδοθεί πλέον:

$$\frac{A}{E} = \frac{\Gamma}{\Delta}$$

Στη γλώσσα του Αρχιμήδη το θεώρημα:

«Η επιφάνεια κάθε σφαίρας είναι τετραπλάσια του μέγιστου κύκλου της σφαίρας»

Στη συμβολική γλώσσα αποδίδεται:

$$\text{Σε κάθε σφαίρα, η επιφάνειά της είναι } E_{\sigma\phi} = 4\pi\rho^2.$$

Για να είμαστε ακριβείς τα γράμματα Α, Γ, Ε, Δ στην πιο πάνω φράση του Ευκλείδη δεν είναι ακόμη σύμβολα μεταβλητών, όπως στην σύγχρονη έκφραση, αλλά ονόματα των συμβόλων μεταβλητών, δηλαδή των ευθυγράμμων τμημάτων που χρησιμοποιούνται ως αναπαράσταση για τους αριθμούς. Αξίζει εδώ να αναφέρουμε ότι ούτε η συμβολική γλώσσα των αριθμών δεν εμφανίζεται στα μαθηματικά κείμενα (γεωμετρία και αριθμοθεωρία) της κλασσικής αρχαιότητας. Η λογαριασμοί ήταν δουλειά της Λογιστικής.

Μια πρώτη μορφή αλγεβρικού συμβολισμού έχει επινοηθεί από το Διόφαντο γύρω στο 250 μ.Χ. για τις ανάγκες του έργου του Αριθμητικά, τα οποία περιέχουν 150 περίπου προβλήματα, καθένα από τα οποία μεταγράφεται σε μια πολωνυμική εξίσωση, αρκετά με περισσότερους από ένα αγνώστους. Τα περισσότερα σύμβολα του Διόφαντου αποτελούν ακροφωνικές συντομεύσεις, ενώ για τον άγνωστο εισάγει το σύμβολο ζ, και τους όρους που θα πρέπει να αφαιρούνται του προσημαίνει με ένα αντεστραμμένο ψ:

M^0 σημαίνει μονάς (x^0)

Δ^Y σημαίνει δύναμη (x^2)

K^Y κύβος (x^3)

$\Delta^Y\Delta$ δυναμοδύναμη (x^4)

ΔK^Y δυναμοκύβος (x^5)

KYK κυβόκυβος (x^6)

$$\text{Έτσι: } K^Y\beta'z\theta' \nabla \Delta^Y\delta'M^0\gamma' = (2x^3+9x)-(4x^2+3) = 2x^3-4x^2+9x-3$$

Ο σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός ήρθε στο προσκήνιο της ιστορίας με το έργο του Vieta μετά από εννέα περίπου αιώνες.

Με τη σταδιακή ανάπτυξη της συμβολικής γλώσσας η μαθηματική γλώσσα συμπληρώνεται με νέα στοιχεία στο αλφάβητό της και νέους κανόνες σύνταξης για τα σύμβολα αυτά που δεν διατυπώνονται από την αρχή αναλυτικά αλλά διαμορφώνονται σταδιακά και εμπειρικά μέσα από τη χρήση. Το διαμορφούμενο σύστημα των συμβόλων αποκτά συντακτική και σημασιολογική αυτοτέλεια, αντικαθιστά εξελισσόμενο ολόκληρα κομμάτια λόγου από τη προηγούμενη γλώσσα, η οποία ωστόσο παραμένει κυρίαρχη.

Η εξέλιξη αυτή έχει τρεις σημαντικές συνέπειες: Η μία είναι ότι μορφολογικά πλέον ο (γραπτός) μαθηματικός λόγος εμφανίζεται ως ένα ιδιάζον μείγμα από κομμάτια λόγου που ανήκουν στην καθομιλουμένη και κομμάτια που ανήκουν στη συμβολική, ένα ανακάτωμα δηλαδή λέξεων και συμβόλων. Η δεύτερη είναι ότι το ιδιάζον αυτό μείγμα δεν διέπεται από ενιαίο συντακτικό και γραμματική. Και η τρίτη, ότι ενώ η μαθηματική γλώσσα της κλασσικής αρχαιότητας είναι μια γλώσσα άμεσης θέασης, δηλαδή οι μαθηματικοί σκέπτονται άμεσα τα αντικείμενα για τα οποία μιλούν, τώρα ανάμεσα στη σκέψη και τα αντικείμενα παρεμβάλλονται τα σύμβολα (κατά κανόνα γράμματα και διάφορα άλλα γραφήματα) έτσι που

τα μαθηματικά αντικείμενα να χάνονται και η μαθηματική δραστηριότητα να εκφυλλίζεται εύκολα (ιδιαίτερα στο επίπεδο της εκπαίδευσης) σε ένα παιγνίδι χειρισμού συμβόλων.

Ωστόσο, η εξέλιξη αυτή ήταν μια ιστορική αναγκαιότητα. Οι εκφραστικές δυνατότητες του αρχαίου ελληνικού μαθηματικού λόγου είχαν κυριολεκτικά εξαντληθεί με το έργο του Αρχιμήδη και την αρχαία μέθοδο της ολοκλήρωσης (ή μέθοδος της εξάντλησης). Πέρασαν 2000 σχεδόν χρόνια για να φτάσουν τα μαθηματικά να αντιμετωπίσουν προβλήματα ανάλογης (και φυσικά πολύ μεγαλύτερης) πολυπλοκότητας, με την νέα μέθοδο ολοκλήρωσης αυτήν του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού (Leibniz, Newton) η οποία θα ήταν αδύνατον να αναπτυχθεί αν ο μαθηματικός λόγος δεν διέθετε τα κατάλληλα εκφραστικά μέσα, τον αλγεβρικό δηλαδή συμβολισμό της εποχής, εξέλιξη του οποίου αποτελεί η γλώσσα της ανάλυσης.

Η εισαγωγή από τον Cantor της έννοιας του συνόλου στα μαθηματικά περί τα τέλη του 19^{ου} αιώνα, τα παράδοξα που ακολούθησαν και η προσπάθεια υπέρβασης της κρίσης που δημιουργήσαν στις αρχές (θεμέλια) των μαθηματικών, έδωσαν, όπως είναι γνωστό, μεγάλη ώθηση στην ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής και του μαθηματικού φορμαλισμού. Μέσα σ' αυτό το γόνιμο κλίμα των αρχών του αιώνα μας, η προσπάθεια αυστηρής σημασιολογικής οριοθέτησης των εκφραστικών μέσων της μαθηματικής γλώσσας στην οποία ενυπάρχουν όλες οι αδυναμίες της καθομιλουμένης από την οποία προέρχεται, είναι ένας από τους κύριους παράγοντες δημιουργίας των τυπικών μαθηματικών γλωσσών. Η τυπική αυτή γλώσσα έχει όλα τα χαρακτηριστικά των τεχνιτών γλωσσών. Έχει αυστηρά ορισμένο αλφάβητο, σύνταξη και ένα μέρος της σημασιολογίας της αυτό που αφορά τα εκφραστικά μέσα των λογικών στοιχείων της γλώσσας. Η υπόλοιπη σημασιολογία ορίζεται κάθε φορά ανάλογα με τη θεωρία για την οποία κανείς θέλει να μιλήσει.

Στη γλώσσα του Ευκλείδη:

Ἔστωσαν ὅποσαοὺν μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Ἐστω οσαδήποτε μεγέθη ανάλογα, τα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και όπως είναι το Α προς το Β έτσι είναι και το Δ προς το Ε και το Ε προς το Ζ, λέγω ότι όπως είναι το Α προς το Β έτσι είναι και το Α συν Γ συν Ε προς το Β συν Δ συν Ζ.

[Ευκλείδης, V, 12]

Το θεώρημα αυτό του Ευκλείδη σε ελεύθερη απόδοση και με τη βοήθεια του συμβολισμού γράφεται:

«Για οποιαδήποτε μεγέθη Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ:

$$\text{αν } \frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{E}{Z} \text{ τότε } \frac{A}{B} = \frac{A + \Gamma + E}{B + \Delta + Z} \gg$$

Ενώ στη τυπική μαθηματική γλώσσα, αποδίδεται ως εξής:

$$\ll \forall A, \forall B, \forall \Gamma, \forall \Delta, \forall E, \forall Z \left[\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{E}{Z} \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{A + \Gamma + E}{B + \Delta + Z} \right] \gg$$

Ενώ το θεώρημα για την ύπαρξη άπειρων πρώτων αριθμών [Ευκλείδης, VIII, 20]:

«Οι πρώτοι αριθμοί είναι περισσότεροι από οποιοδήποτε πλήθος πρώτων αριθμών δοθέντων εκ των προτέρων», που στην τυπική μαθηματική γλώσσα γράφεται:

$$\exists^\infty z, \forall x, \forall y [z = xy \rightarrow (x = 1) \vee (y = 1)]$$

5.3 Η φυσική μαθηματική γλώσσα

Η μαθηματική γλώσσα, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, δεν είναι άλλη από την ειδική εκείνη γλώσσα της μαθηματικής κοινότητας. Η πρώτη μορφή με την οποία ήρθε στο προσκήνιο της ιστορίας, ανιχνεύεται στα διασωθέντα αποσπάσματα από τα *Στοιχεία* του Ιπποκράτη του Χίου, ενώ με την ολοκληρωμένη μορφή της εμφανίζεται στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και τα έργα του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου. Διαθέτει το ίδιο αλφάβητο και την ίδια σύνταξη με τη φυσική γλώσσα της εποχής εκείνης και διαφέρει απ' αυτήν μόνο ως προς το σύστημα των σημασιολογικών κανόνων. Με άλλα λόγια χρησιμοποιεί τα εκφραστικά μέσα της φυσικής γλώσσας από την οποία προέρχεται και με αυτήν την έννοια τη λέμε φυσική μαθηματική γλώσσα.

Μια τέτοια γλώσσα μπορεί (και πρέπει για λόγους διδακτικής) να χρησιμοποιηθεί ως γλώσσα της διδασκαλίας της στοιχειώδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας και απλής αριθμοθεωρίας.

5.4 Η τυπική μαθηματική γλώσσα

Η τυπική μαθηματική γλώσσα δεν είναι άλλη από τη γλώσσα του κατηγορηματικού λογισμού, όπως την περιγράψαμε στο πρώτο μέρος των σημειώσεων αυτών.

Το αλφάβητο και η σύνταξη της γλώσσας αυτής παραμένει ένα τυπικό σύστημα, χωρίς εκφραστικές δυνατότητες, αν δεν συμπληρωθεί με ένα σύστημα σημασιολογικών κανόνων. Με άλλα λόγια αν δεν αποδοθεί σημασία στα μη λογικά της σύμβολα. Η σημασία αυτή εξαρτάται από τη μαθηματική δομή η οποία χρειάζεται να περιγραφεί και να μελετηθεί. Πρόκειται δηλαδή για μια γλώσσα χωρίς σταθερή σημασιολογία. Η σημασιολογία καθορίζεται από τη μαθηματική δομή (τη θεωρία) την οποία θέλουμε κάθε φορά να διατυπώσουμε. Με τον ορισμό του συστήματος των σημασιολογικών κανόνων το σύνολο των όρων **O** θα γίνει το σύνολο των ονομάτων των μαθηματικών αντικειμένων που αποτελούν το βασικό σύνολο της δομής, ενώ το σύνολο των τύπων **T** θα είναι το σύνολο των φράσεων που θα εκφράζουν τα μαθηματικά γεγονότα που συμβαίνουν, ή όχι, στη συγκεκριμένη δομή. Το σύνολο **O** είναι ελάχιστο από συντακτική μόνο σκοπιά. Οι φράσεις της μορφής $t_1 = t_2$ με $t_1 \in \mathbf{O}$ και $t_2 \in \mathbf{O}$ δηλώνουν ότι οι όροι t_1 και t_2 αποτελούν διαφορετικά ονόματα για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο.

Παράδειγμα: Μια γλώσσα L_a κατάλληλη για τη μελέτη του συνόλου των θετικών ακέραιων είναι η γλώσσα που διαθέτει: Δύο σύμβολα κατηγορημάτων δύο θέσεων, το $|=$ για την ισότητα και το $<$ για τη φυσική διάταξη. Δύο σύμβολα συναρτήσεων το $+$ για την πρόσθεση και το $*$ για τον πολλαπλασιασμό. Αντί για $|(x_1, x_2)|$ γράφουμε $x_1 + x_2$ και αντί για $|(x_1, x_2)|$ γράφουμε $(x_1 * x_2)$. Δύο σύμβολα σταθερών το $|0|$ για το μηδέν και το $|1|$ για το ένα. Έτσι το τρία είναι το $((1+1)+1)$ κ.τ.λ

Οι φράσεις:

Ο x είναι πρώτος

Ο x είναι άρτιος

Κάθε άρτιος είναι άθροισμα δύο πρώτων

Γράφονται στη γλώσσα αυτή ως εξής:

$(\forall k)(\forall n) [x = (k \cdot n) \rightarrow (k=1) \vee (n=1)]$

$(\exists y)[x=y+y]$

$(\forall x)[(\exists y)[x=y+y] \rightarrow (\exists z_1)(\exists z_2)[(\forall k)(\forall n)[z_1=(k \cdot n) \rightarrow (k=1) \vee (n=1)] \wedge (\forall k')(\forall n')[z_2=(k' \cdot n') \rightarrow (k'=1) \vee (n'=1)] \wedge (z_1+z_2=x)]$

Την απόδοση σε τυπική γλώσσα μιας έκφρασης της μαθηματικής γλώσσας θα την ονομάζουμε **τυποποίηση** της έκφρασης.

Βεβαίως ένα μαθηματικό κείμενο, και ιδιαίτερα ένα κείμενο που γράφεται για διδακτικούς σκοπούς, δεν είναι ποτέ γραμμένο αποκλειστικά σε τυπική μαθηματική γλώσσα. Επίσης ένα σύγχρονο μαθηματικό κείμενο δεν είναι ποτέ γραμμένο αποκλειστικά με τα εκφραστικά μέσα του φυσικού λόγου, όπως γινότανε την εποχή του Ευκλείδη.

5.5 Η μαθηματική γλώσσα

Ο μαθηματικός λόγος, όπως εμφανίζεται σε ένα οποιοδήποτε σύγχρονο μαθηματικό κείμενο, αποτελεί ένα **μείγμα** από εκφράσεις που προέρχονται από την καθομιλουμένη, εκφράσεις που προέρχονται από κάποια τυπική μαθηματική γλώσσα, κάποια σύμβολα, γραφήματα, σχήματα κ.τ.λ., σε όλες τις δυνατές αναλογίες. Όταν λοιπόν αναφερόμαστε στη **Μαθηματική Γλώσσα** εννοούμε εκείνη τη γλώσσα που πραγματώνεται σε αυτό το ιδιάζον μείγμα που αντικειμενικά συνιστά το σύγχρονο μαθηματικό λόγο.. Το πρόβλημα της βέλτιστης αναλογίας, ώστε η εκφραστικότητα και η κατανόηση του κειμένου να είναι μέγιστες, έχει ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη διδακτική των μαθηματικών.

5.6 Η μαθηματική έκφραση (Μ.Ε.)

Στα πλαίσια της φυσικής γλώσσας έχουμε ορίσει την έκφραση ως ένα σύνταγμα μιας γραμματικώς ορθής τελικής ακολουθίας. Ωστόσο ο ορισμός αυτός είναι εφαρμόσιμος μόνο για κομμάτια λόγου της μαθηματικής γλώσσας τα οποία είναι διατυπωμένα κυρίως με στοιχεία της καθομιλουμένης. Τις εκφράσεις της μαθηματικής γλώσσας οι οποίες έχουν ένα μαθηματικό περιεχόμενο θα τις λέμε **μαθηματικές εκφράσεις**.

Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις, που εξαντλούν τις τρεις ιστορικά διαμορφωμένες δυνατότητες:

A. Όταν οι εκφράσεις ανήκουν στη φυσική μαθηματική γλώσσα, τότε διαθέτουμε κριτήρια για να τις διακρίνουμε, αυτά που απορρέουν από τον ορισμό της έκφρασης στη φυσική γλώσσα. Για παράδειγμα οι ακολουθίες:

1. Το σύνολο των πρώτων αριθμών
2. Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί
3. Η εικόνα της συνάρτησης f στο σημείο x

είναι μαθηματικές εκφράσεις. Η εμφάνιση κάποιων συμβόλων σαν ονόματα μαθηματικών αντικειμένων, όπως στην (3), είναι δυνατή όταν αυτή δεν αλλοιώνει τη φυσική σύνταξη της έκφρασης. Η (3) είναι ένα ονοματικό σύνταγμα

B. Όλοι οι όροι O και οι τύποι T μιας τυπικής μαθηματική γλώσσας είναι μαθηματικές εκφράσεις όταν η γλώσσα αυτή περιγράφει μια μαθηματική δομή

Για παράδειγμα στη γλώσσα $|L_a|$ της αριθμητικής που αναφέραμε οι παρακάτω ακολουθίες συμβόλων είναι μαθηματικές εκφράσεις

4. $|x|$
5. $|xy|$
6. $|x+y|$
7. $|x < y|$
8. $|(\exists x)(y)[x < |y|]|$
9. $|(\exists x).(\forall y)(\forall z)[x = (y \cdot z) \rightarrow (x=y) \vee (y=1)]|$

$$10. |x+xy=0|$$

Εξάλλου η εισαγωγή ορισμένων ακόμη συμβόλων πλουτίζει τις εκφραστικές δυνατότητες της $|L_a|$

Για παράδειγμα μπορεί να εισαχθεί ένα σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων, το $||$, ως εξής:

$$|(x|y) \equiv (\exists z)[y=xz]|$$

C. Όμως η πιο συνηθισμένη μορφή εμφάνισης των μαθηματικών εκφράσεων στα μαθηματικά κείμενα είναι γενικά το αποτέλεσμα της μείξης των δύο προηγούμενων περιπτώσεων μαζί με μια σειρά συμβόλων, γραφημάτων κ.τ.λ. τα οποία έχουν δημιουργηθεί για να υπηρετήσουν ειδικές εκφραστικές ανάγκες. Για την συγκρότηση των Μ.Ε. αυτής της μορφής έχουν παγιωθεί μια σειρά από συμφωνίες γενικά αποδεκτές από την μαθηματική κοινότητα. Υπάρχει δηλαδή το γλωσσικό αισθητήριο της Μαθηματικής κοινότητας για τη μαθηματική γλώσσα

Σύμφωνα λοιπόν με το γλωσσικό αυτό αισθητήριο, που σημαίνει με κριτήρια σημασιολογικά και εμπειρικά, σύμφωνα με τις γενικά αποδεκτές συμφωνίες, και ακόμη ότι τα x, y, z, α, β κ.τ.λ. συμβολίζουν πραγματικούς αριθμούς, οι παρακάτω ακολουθίες σημείων είναι Μ.Ε. :

$$11. x^a$$

$$12. |x^2 + \sqrt{xy} + y^2|$$

$$13. \log_x \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_x y =$$

$$14. |H, \text{πραγματική, συνάρτηση η οποία σε κάθε, πραγματικό αριθμό } x \text{ αντιστοιχεί τον αριθμό } x^2 \sin(2^x + y)|$$

$$15. \text{Έστω, } P(x) = x^3 - 1 \text{ και } Q(x) = x + 1. \text{ Τότε έχουμε, } P(x) - x^2 Q(x) = x^3 - 1 - x^3 - x^2 = -x^2 - 1$$

$$16. O (2^x + yz) (x^2 + 1), \text{ είναι ρητός}$$

$$17. |2^3 = 8|$$

$$18. |O \text{ ελάχιστος } x \text{ τέτοιος ώστε, } x^2 < 10x + 8 \text{ είναι ρητός}|$$

$$19. |\eta \mu^{2k+1} x < \eta \mu^{2k} x, \text{ διά κάθε } x \in [0, \pi/2]|$$

$$20. |\{x/x \text{ είναι διαιρέτης του } 30\}|$$

$$21. \int_0^2 \left(\int_0^1 x dx \right) \sin y y dy$$

$$22. O x^2 \text{ είναι ρητός}$$

$$23. \int_0^2 \frac{\text{Log} x}{x} dx < 0$$

$$24. \quad |x + \int x^2 dx$$

Σύμφωνα επίσης με τις γενικά αποδεκτές συμφωνίες οι παρακάτω συναρμογές **δεν** είναι Μ.Ε

$$25. \quad x + \int x^2$$

$$26. \quad \sum_1^\infty (5)$$

$$27. \quad (\forall 2) \exists \text{ αριθμός που διαιρεί το } 10^* |$$

$$28. \quad |x + =2|$$

$$29. \quad |\eta\mu^2 + \sigma\upsilon\nu^2 = 1^* |$$

Η διατύπωση αυτή είναι λάθος μεταφορά σε συμβολική γλώσσα της απόφασης «το άθροισμα των τετραγώνων του ημιτόνου και του συνημίτονου ενός τόξου κάνει ένα».

$$30. \quad |1+2+3+4+5=3=6=10=15^* |$$

$$31. \quad |x + \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma^*$$

$$32. \quad x = \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma^* \text{ Οι εκφράσεις που φέρουν αστεράκι είναι διατυπωμένες από μαθητές ή φοιτητές}$$

Η (32) χρησιμοποιείται καμιά φορά σαν συνώνυμη της:

«ο x είναι ρητός»

Ωστόσο δεν είναι συνώνυμη. Πρόκειται για μια γλωσσική αβαρία: το |=|χρησιμοποιείται με το περιεχόμενο του είναι ενώ το περιεχόμενό του «είναι: είναι ίσο με»

Το |=|, όπως και το + είναι κατηγορήματα δύο θέσεων, ή δύο θέσεων που καταλαμβάνονται από σύμβολα μαθηματικών αντικειμένων και όχι από γλωσσικά σημεία που προέρχονται από την καθομιλουμένη. Ανάλογη είναι και η αβαρία στην (31), ή και ο συνδυασμός των δύο, όπως στην:

αν x άρρητος τότε, x + ρητός=άρρητος

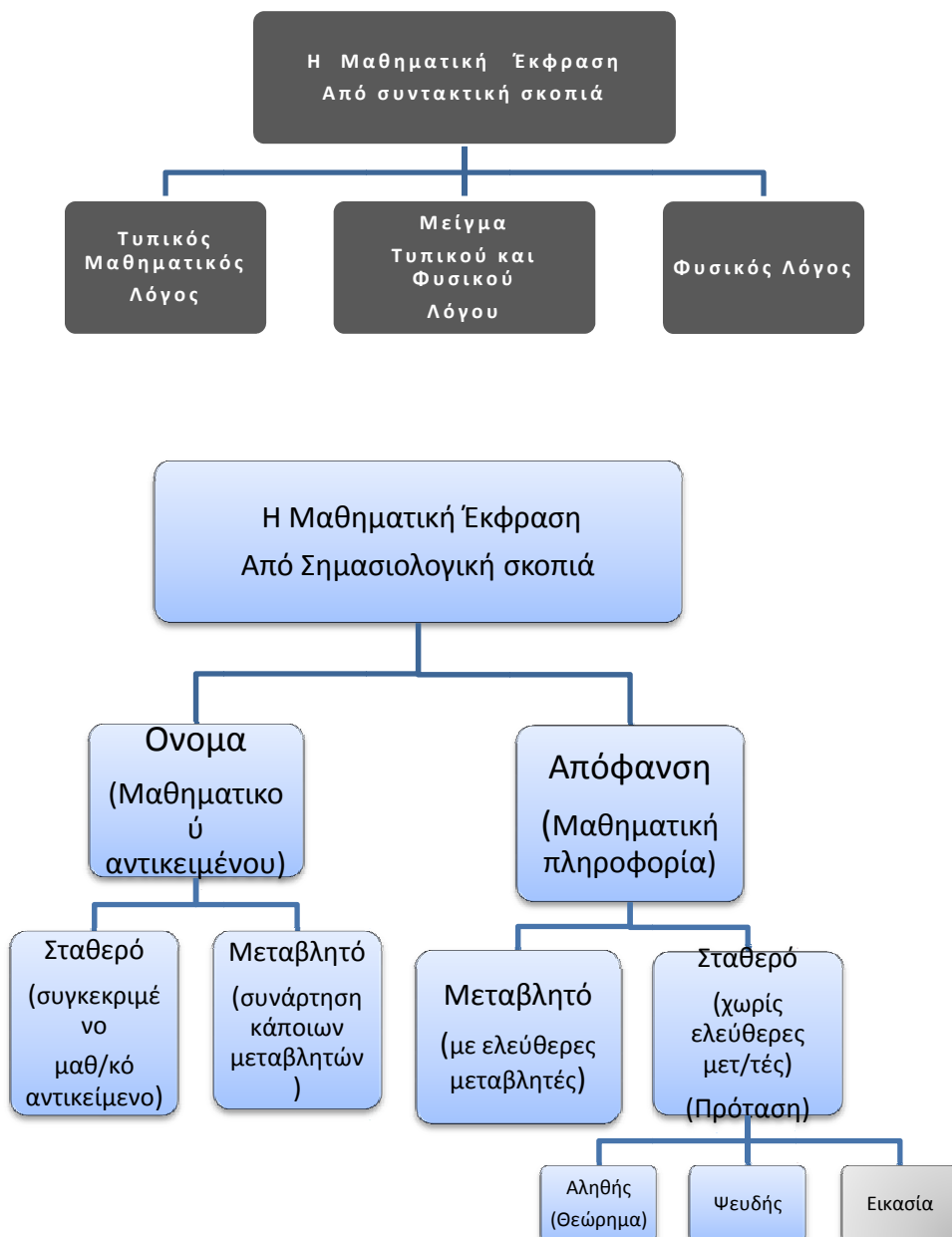
Η μελέτη των προβλημάτων που δημιουργούνται από τις γλωσσικές αβαρίες στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών είναι σοβαρό και ενδιαφέρον θέμα για την διδακτική των μαθηματικών. Όμως είναι έξω από το αντικείμενο αυτής της εργασίας.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι όπως και στις καθομιλούμενες γλώσσες ένα οποιοδήποτε κομμάτι μιας τελικής ακολουθίας δεν είναι αναγκαστικά σύνταγμα (άρα ούτε έκφραση), όμοια και στις μαθηματικές εκφράσεις ένα κομμάτι μιας Μ.Ε. δεν είναι πάντα Μ.Ε. Για παράδειγμα η (25) είναι τμήμα της (24) όπως και τα $|2^x + 1|$, είναι τμήματα της (16) δεν αποτελούν όμως εκφράσεις.

5.7 Ταξινόμηση των μαθηματικών εκφράσεων

Από σημασιολογική σκοπιά οι μαθηματικές εκφράσεις μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες: τα **ονόματα** (ή **όρους**) και τις **αποφάνσεις** (ή **πληροφορίες** ή **δηλώσεις**)

Ένα όνομα παριστά (σημαίνει) ένα μαθηματικό αντικείμενο σταθερό ή μεταβλητό. Μια απόφαση εκφράζει ένα μαθηματικό γεγονός σταθερό ή μεταβλητό, πραγματοποιούμενο ή όχι. Στον κατάλογο της προηγούμενης παραγράφου οι εκφράσεις 1, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 14, 20, 21, είναι ονόματα ενώ οι 2, 7, 8, 9, 10, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 23, είναι αποφάνσεις. Στην τυπική μαθηματική γλώσσα, οι όροι ***O*** είναι ονόματα ενώ οι τύποι ***T*** είναι αποφάνσεις. Δύο μαθηματικές εκφράσεις λέμε πώς είναι **συνώνυμες** μόνο στην περίπτωση που: εάν είναι ονόματα αποτελούν σημαίνοντα του ίδιου σημαινόμενου, ενώ εάν είναι αποφάνσεις εκφράζουν το ίδιο μαθηματικό γεγονός.



Η Λογικογλωσσική διάρθρωση του Μαθηματικού λόγου

6. Ο Μαθηματικός λόγος

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε το απαραίτητο για τη γλωσσική ανάλυση των μαθηματικών κειμένων πλαίσιο. Εδώ παρουσιάζουμε ορισμένες έννοιες, οι οποίες μαζί με την πρωτοβάθμια λογική που εκθέσαμε στο πρώτο κεφάλαιο, συγκροτούν το απαραίτητο για τη λογική ανάλυση πλαίσιο.

Από τη σκοπιά των επιπέδων έκφρασης (ή της σημασίας της κάθε φράσης, του πεδίου αναφοράς της) ο μαθηματικός λόγος, από τη φύση του, είναι διατυπωμένος σε τρία κύρια επίπεδα έκφρασης, το μαθηματικό που περιέχει την καθαρά μαθηματική πληροφορία, το επιμαθηματικό και το περίμαθηματικό τα οποία παρέχουν πληροφορίες οι οποίες βοηθούν, είναι απαραίτητες για την κατανόηση του μαθηματικού επιπέδου. Παράλληλα, μπορούμε να διακρίνουμε τα μέρη του μαθηματικού λόγου. Πρόκειται ορισμένα κομμάτια λόγου που το καθένα παίζει έναν εντελώς διαφορετικό ρόλο μέσα στο κείμενο.

6.1 Η διάρθρωση του Μαθηματικού λόγου σε γλωσσολογικά επίπεδα.

Τα γλωσσολογικά επίπεδα, ή επίπεδα έκφρασης, λειτουργούν στις φυσικές γλώσσες σε όλα τα αφηγηματικά ήδη του λόγου. Ας δούμε ένα παράδειγμα μέσα από διατύπωση του παράδοξου του Επιμενίδη¹:

Ένας Κρητικός είπε₁ πως, όλοι οι Κρητικοί είναι ψευτες₂.

Αυτή η περίοδος δεν αποτελεί πρόταση, αν και αποτελείται από δύο μικρότερες προτάσεις. Όμως οι προτάσεις αυτές δεν συνδέονται μεταξύ τους από κάποιο λογικό σύνδεσμο. Ανάμεσά τους

¹ Μια άλλη διατύπωση είναι η αυτοαναφορική: Κάποιος λέει «ψεύδομαι» ή «αυτή τη στιγμή λέω ψέματα». Αν αυτό είπε είναι ψέμα, τότε είναι ψέμα ότι ψευδεται άρα λέει την αλήθεια, δηλαδή αυτό που είπε δεν είναι ψέμα. Αν αυτό που είπε είναι αλήθεια, τότε είναι αλήθεια ότι ψευδεται, δηλαδή αυτό που είπε δεν είναι αλήθεια.

υπάρχει η αναφορική αντωνυμία *πως* (θα μπορούσε να ήταν η αναφορική αντωνυμία *ότι*). Επίσης οι δύο αυτές συμβαλλόμενες προτάσεις αναφέρονται σε τελείως διαφορετικά πράγματα. Έχουν εντελώς διαφορετικό πεδίο αναφοράς: Η (1) αναφέρεται στο σύνολο των φράσεων που είπε ένας Κρητικός. Για να εξετάσουμε αν αληθεύει ή όχι θα πρέπει να δούμε αν η φράση (1) περιέχεται στον κατάλογο των φράσεων που έχει διατυπώσει ο Κρητικός αυτός!! Η πληροφορία δε που μας δίνει είναι ότι τη φράση (2) την είπε ένας Κρητικός. Το πεδίο αναφοράς της (2) είναι το σύνολο των Κρητών. Για να ελέγξουμε αν αληθεύει ή όχι, θα πρέπει να εξετάσουμε ένα-ένα του Κρήτες κλπ. Αυτό που είναι ενδιαφέρον εδώ είναι ότι ουσιαστικά η (1) αναφέρεται στην (2), μας δίνει μια πληροφορία για τη (2) (ότι την έχει διατυπώσει ένας Κρητικός) και αυτή στο σύνολο των Κρητών. Δηλαδή οι δύο φράσεις βρίσκονται σε διαφορετικά γλωσσολογικά επίπεδα: η (1) είναι σε ένα επί-επίπεδο σε σχέση με τη (2). Τελικά αν δεν διακρίνουμε τα δύο επίπεδα και επιχειρήσουμε να αποδώσουμε τιμή αλήθειας, πέφτουμε σε αντιφάσεις.

Ανάλογα φαινόμενα συναντάμε και στα μαθηματικά κείμενα: Σε ένα μαθηματικό κείμενο υπάρχουν κομμάτια λόγου, είτε ολόκληρες φράσεις ή και μία μόνο λέξη, τα οποία δεν συμβολίζουν κανένα μαθηματικό αντικείμενο, ούτε εκφράζουν κάποια σχέση μεταξύ των μαθηματικών αντικειμένων, αλλά παρέχουν πληροφορίες για το πώς πρέπει να κατανοηθούν και να συνδεθούν μεταξύ τους οι μαθηματικές εκφράσεις που κατά κανόνα ακολουθούν ή αποτελούν το περιβάλλον κείμενο.

Ας δούμε ορισμένα παραδείγματα παρμένα από πραγματικά κείμενα ελληνικού μαθηματικού λόγου:

(1) Έστω ένας σύνθετος αριθμός ο $\mathcal{A}_1$, λέγω ότι ο $\mathcal{A}$ έχει ένα πρώτο διαιρέτη,

Ευκλείδης, VII.21

Η φράση $|\text{Έστω ένας σύνθετος αριθμός ο } \mathcal{A}|$, προφανώς και δεν αποτελεί όνομα κάποιου μαθηματικού αντικειμένου. Απλώς περιέχει ένα τέτοιο όνομα το $\mathcal{A}$. Επίσης δεν δηλώνει κάποιο μαθηματικό γεγονός αφού δεν είναι αποφαντική φάση αλλά προστακτική. Είναι δηλαδή μια απαίτηση προς τον φανταστικό αναγνώστη να αποδεχτεί τη συμφωνία ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα σύνθετο αριθμό, ότι ο αριθμός αυτός δεν είναι κάποιος συγκεκριμένος αριθμός, και ότι το όνομά του συμφωνούμε να είναι το $\mathcal{A}$ (ότι τον συμβολίζουμε με $\mathcal{A}$). Με άλλα λόγια ότι η μεταβλητή $\mathcal{A}$ θα πρέπει να θεωρείται από τον αναγνώστη δεσμευμένη με καθολική ποσόδειξη, μέχρι το τέλος της ενότητας που εισάγει αυτή η φράση και που δεν είναι άλλη από την απόδειξη του θεωρήματος που λέει ότι, *κάθε σύνθετος αριθμός έχει ένα πρώτο διαιρέτη*.

Είναι λοιπόν φανερό πως η φράση αυτή παρέχει στον αναγνώστη πληροφορίες απαραίτητες για την κατανόηση των φράσεων που ακολουθούν, (αλλά και τη λογική νομιμότητα της απόδειξης που επίσης ακολουθεί). Δεν λέει τι υπάρχει ή τι συμβαίνει στο σύνολο των ακεραίων, αλλά πως εμείς συμφωνούμε να θεωρήσουμε και να συμβολίσουμε κάποιο αντικείμενο από το σύνολο αυτό.

Είναι φανερό λοιπόν ότι η φράση (1) στο παράδειγμα αυτό βρίσκεται σε διαφορετικό επίπεδο από την (2): Η (2) διατυπώνει το μαθηματικό γεγονός ότι ο σύνθετος αριθμός A έχει (τουλάχιστον ένα) πρώτο διαιρέτη, ενώ η (1) μας πληροφορεί ότι το γράμμα A που εμφανίζεται στη (2) συμβολίζει έναν τυχαίο σύνθετο αριθμό από το σύνολο των (φυσικών) αριθμών.

Η (2) λοιπόν που αναφέρεται αυστηρά στο σύμπαν των μαθηματικών αντικειμένων θα λέμε πως βρίσκεται στο Μαθηματικό επίπεδο, ενώ η (1) που εισάγει τις συμφωνίες για τη μεταβλητή A , ότι βρίσκεται στο επί μαθηματικό επίπεδο.

Γενικά:

- i) το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται οι εκφράσεις που αφορούν αυστηρά το σύμπαν των μαθηματικών αντικειμένων, δηλαδή οι εκφράσεις οι οποίες είτε αποτελούν σημαίνοντα (ονόματα) κάποιου μαθηματικού αντικειμένου είτε εκφράζουν κάποιο μαθηματικό γεγονός (αποφάνσεις) θα το ονομάζουμε **μαθηματικό** επίπεδο.
- ii) Ενώ το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται οι εκφράσεις που παρέχουν οποιαδήποτε πληροφορία που αναφέρεται στα εκφραστικά μέσα που χρησιμοποιούνται στο μαθηματικό επίπεδο θα το λέμε **επι-μαθηματικό** επίπεδο.

Έτσι στο παράδειγμα 1 η φράση λοιπόν αυτή δε βρίσκεται στο μαθηματικό επίπεδο αλλά στο **επιμαθηματικό**. Στο επιμαθηματικό επίσης επίπεδο βρίσκεται και η επόμενη φράση $|λέγω\ ότι|$ η οποία δηλώνει τον ισχυρισμό ότι η πρόταση που ακολουθεί $|ο\ A\ έχει\ πρώτο\ διαιρέτη|$ είναι αληθινή και ότι η αλήθεια αυτή θα τεκμηριωθεί αμέσως μετά.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν τα κομμάτια λόγου που είναι γραμμένα με καλλιγραφικούς χαρακτήρες δεν ανήκουν στο μαθηματικό επίπεδο, αλλά στο επιμαθηματικό ενώ στο μαθηματικό επίπεδο ανήκουν αυτά με τους απλούς χαρακτήρες:

(2) $\mathcal{A}$ ς έχει δοθεί ένας κύκλος $ο\mathcal{A}$ και ένα χωρίο το $\mathcal{B}$. (Δεδοσθω κύκλος $ο\ A$ και χωρίον τι το B)

Αρχιμήδης, 16, ΠΣΚΚ Α΄

(3) Έστω ϵ_1 και ϵ_2 δύο μη κάθετες ευθείες και $(\epsilon_1, \epsilon_2) = \omega$.

Μαθ., Β΄ Λυκείου, σελ. 77

(4) Για την αλγεβρική τιμή σε ακτίνια μιας γωνίας θα χρησιμοποιούμε το ίδιο το σύμβολο της γωνίας.

ο.π., σελ.54

(5) Έστω μία συνάρτησις f ορισμένη εις εν κλειστόν διάστημα $[\alpha, \beta]$ και συνεχής εν αυτώ. Έστωσαν $f(\alpha) = \eta_1$ και $f(\beta) = \eta_2$ με $\eta_1 \neq \eta_2$ και επί πλέον η εις πραγματικός αριθμός μεταξύ των η_1 και η_2 :τότε υπάρχει εν (τουλάχιστον) σημείον ξ μεταξύ των άκρων του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ τοιούτον ώστε να ισχύει : $f(\xi) = \eta$.

ΚΑΠΠΟΣ, σελ.180

Τα παραδείγματα (2) και (3) είναι όπως και το (1). Το (4) αναφέρεται μόνο στο συμβολισμό που στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί, βρίσκεται λοιπόν στο επιμαθηματικό. Το (5) είναι μια διατύπωση του θεωρήματος του Boltzmann, όπου το καλλιγραφικό μέρος είναι επίμαθηματικό και προετοιμάζει, δίνει τις απαραίτητες πληροφορίες, για να κατανοηθεί το μαθηματικό μέρος που ακολουθεί.

Όμως σ' ένα μαθηματικό κείμενο συναντάμε και άλλες φράσεις εντελώς διαφορετικές από αυτές του μαθηματικού και επιμαθηματικού επιπέδου, όπως:

(6) Ο ορισμός αυτός καλύπτει και την περίπτωση δύο διανυσμάτων.

Μαθ., Β' Λυκείου, σελ.31

(7) Το ολοκλήρωμα $\int_{\theta}^{\pi} \eta \mu x dx$ υπολογίζεται διά της διαδοχικής εφαρμογής παραγοντικής ολοκληρώσεως .

ΚΑΠΠΟΣ, σελ.439

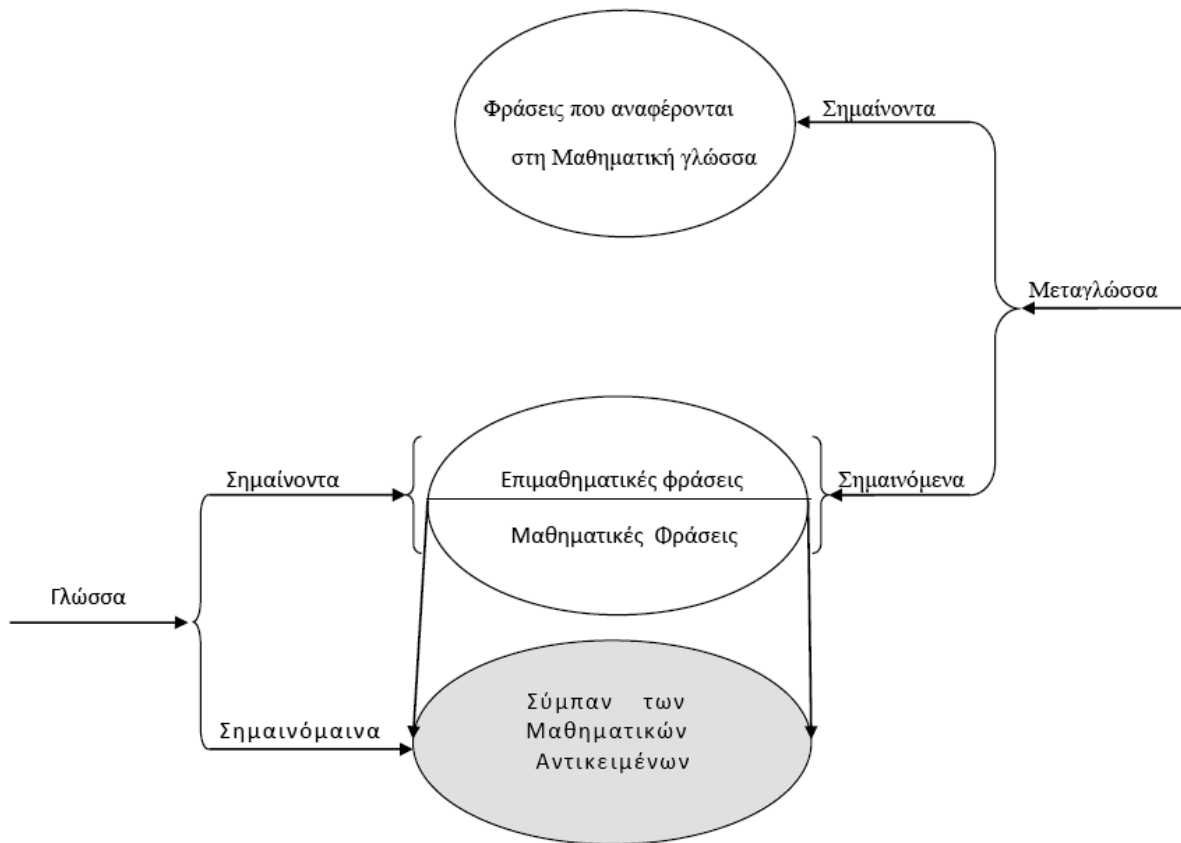
(8) Το θεώρημα αυτό το είχε αποδείξει ο Χρύσιππος το 230 π.Χ.

Το (6) πληροφορεί για την εμβέλεια ενός ορισμού που έχει πριν διατυπωθεί. Στο (7) δίνεται μια πληροφορία μεθοδολογικού χαρακτήρα, για το πώς θα λυθεί σχετικά εύκολα το δοσμένο ολοκλήρωμα, ενώ στο (8) δίνεται η πληροφορία ότι το (προαναφερθέν) θεώρημα.

Το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται οι φράσεις αυτές καθώς και οποιαδήποτε άλλη φράση που παρέχει πληροφορία οποιασδήποτε μορφής εκτός από αυτές του μαθηματικού και επιμαθηματικού επιπέδου, θα λέμε πως βρίσκονται στο **περι-μαθηματικό** επίπεδο. Δηλαδή πληροφορίες *ιστορικού* (οι πληροφορίες αφορούν την Ιστορία της επιστήμης) ή *μεθοδολογικού* χαρακτήρα, όπως ποιος και πότε απέδειξε το τάδε θεώρημα ή ανέπτυξε την τάδε Μαθηματική θεωρία, κλπ.. Ποιο το

περιεχόμενο, ή ο βαθμός αυστηρότητας, κλπ., το κοινό στο οποίο απευθύνεται, ο τρόπος που είναι γραμμένο, η τυπογραφία που έχει χρησιμοποιηθεί κλπ..

Ας δούμε τα παραπάνω μέσα από ένα διάγραμμα.



Σχόλια:

1. Είναι φανερό από την παραπάνω ανάλυση ότι ένα μαθηματικό κείμενο, που δεν είναι γραμμένο σε τυπική μαθηματική γλώσσα, είναι από τη φύση του διαρθρωμένο σε τρία γλωσσολογικά επίπεδα: Μαθηματικό, επιμαθηματικό και περιμαθηματικό.
2. Δηλαδή ένα μαθηματικό κείμενο εμφανίζεται σαν μείγμα από μαθηματικές, επιμαθηματικές και περιμαθηματικές εκφράσεις. Όλες αυτές οι εκφράσεις, ή οι φράσεις, ανεξάρτητα από το επίπεδο έκφρασης στο οποίο βρίσκονται, ανήκουν στην ίδια γλώσσα τη μαθηματική γλώσσα.
3. Το εννοιολογικό δίπολο μαθηματικό-επιμαθηματικό δεν πρέπει να συγχέεται με το δίπολο γλώσσα-μεταγλώσσα. Το δεύτερο αναφέρεται σε διαφορετικές γλώσσες: "γλώσσα" εδώ είναι η γλώσσα αντικείμενο μελέτης, ενώ "μεταγλώσσα" είναι η γλώσσα έκφρασης και διατύπωσης της μελέτης αυτής. Το φαινόμενο αυτό είναι χαρακτηριστικό κατά τη διδασκαλία μιας ξένης γλώσσας, π.χ. των Ρωσικών, σε Ελληνικό ακροατήριο: Η Ελληνική

γλώσσα είναι η μεταγλώσσα, ενώ η Ρωσική η γλώσσα. Επίσης σ' ένα μάθημα Μαθηματικής Λογικής, στο κεφάλαιο, για παράδειγμα, του Λογισμού των Προτάσεων, γλώσσα είναι η γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού, όπως ορίζεται στις πρώτες ενότητες του κεφαλαίου αυτού, ενώ μεταγλώσσα είναι η χρησιμοποιούμενη Ελληνική φυσική γλώσσα.

Το πρόβλημα της γλωσσολογικής ανάλυσης, ιδιαίτερα από τη σκοπιά της διδακτικής των Μαθηματικών, βρίσκεται στο να αποκαλυφθεί ο ρόλος που παίζει η κάθε επιμαθηματική έκφραση, ή και περιμαθηματική, στο να αναλυθεί ποιες ακριβώς ενδείξεις και πληροφορίες παρέχει στον αναγνώστη για να τον βοηθήσει να κατανοήσει το ακριβές περιεχόμενο των κομματιών λόγου που βρίσκονται στο μαθηματικό επίπεδο, να εκτιμηθεί τέλος η αξία τους, σε σχέση με το κοινό στο οποίο απευθύνεται το δοσμένο κείμενο.

6.2 Τα μέρη του μαθηματικού λόγου.

Σύμφωνα με τις ιστορικές πηγές που διαθέτουμε, οι πρώτες μαθηματικές αποφάνσεις, καρπός του Ιωνικού διαφωτισμού, διατυπώθηκαν γύρω στο 600 π.Χ. από τον Θαλή. Στο διάστημα των 300 χρόνων που μεσολάβησε μέχρι τη συγγραφή των "Στοιχείων" από τον Ευκλείδη, τα μαθηματικά συγκροτήθηκαν σε αξιωματικοποιημένη παραγωγική επιστήμη. Παράλληλα δημιουργήθηκε και μια άρτια δομημένη μαθηματική γλώσσα, για τις εκφραστικές ανάγκες της πρώτης επιστήμης. Θα ήταν παράδοξο να πιστέψει κανείς ότι ο ελληνικός μαθηματικός λόγος εμφανίστηκε "πάνοπλος", όπως η Αθηνά μέσα από το κεφάλι του Δία, με τη μορφή που έχει στα Στοιχεία του Ευκλείδη (-320). Τα πρώτα μαθηματικά κείμενα έχουν έρθει στο φως 150 χρόνια περίπου πριν από τον Ευκλείδη "διά χειρός Ιπποκράτους του Χίου". Το μεγαλύτερο μέρος της ορολογίας, των συντακτικών δομών, καθώς και η συνολική δομή των κειμένων είχαν παγιωθεί ήδη την εποχή που γράφτηκαν τα Στοιχεία. Η γραφή της εποχής ήταν συνεχής, χωρίς κενά μεταξύ των λέξεων, χωρίς παρεμβολή σημείων στίξεως. Το ρόλο των σημείων στίξεως έπαιζαν ορισμένα συνδετικά μόρια: μεν, δε, τε, γαρ, κτλ. [HUMP1960,368]. Αυτή πρέπει να ήταν και η γραφή των μαθηματικών κειμένων της εποχής. Αν και η εισαγωγή κάποιων σημείων στίξης αποδίδεται στον Αριστοφάνη τον Βυζάντιο (257-180 π.Χ.), πλήρης εφαρμογή του συστήματος της στίξης έχει διαπιστωθεί μόλις τον 8^ο αιώνα [MIONI1979,57].

Από τα αρχαιότερα έργα ολοκληρωμένα μαθηματικά έργα του Αυτόλυκου (-320) μέχρι και τον Εύδοξο τον Ασκαλωνίτη (+520), η γενική δομή των μαθηματικών κειμένων είναι ίδια.

Εξαίρεση αποτελούν ορισμένα έργα του Αρχιμήδη στα οποία προηγείται μια επιστολή. Είναι γνωστό ότι ο Αρχιμήδης συνήθιζε να ανακοινώνει τα αποτελέσματά του στους σύγχρονους του Μαθηματικούς. (Κώνωνα, Δωσίθεο, Ερατοσθένη).

Η ανάλυση βεβαίως της διαδικασίας γένεσης του αρχαίου ελληνικού μαθηματικού λόγου, πρόβλημα ενδιαφέρον και ανοιχτό σε πολλές λεπτομέρειές του, είναι έξω από το σκοπό αυτών των σημειώσεων. Αρκούμεστε λοιπόν στη διαπίστωση ότι ένα μεγάλο μέρος από τα απαραίτητα θεωρητικά εργαλεία για την ανάλυση του μαθηματικού λόγου, είχαν κατακτηθεί ήδη από την κλασσική αρχαιότητα. Αυτό δείχνει εξάλλου και η ακόλουθη αναφορά του Πρόκλου (450)

πάν δὲ πρόβλημα καὶ πᾶν θεώρημα τὸ ἐκ τελείων τῶν ἑαυτοῦ μερῶν συμπληρωμένον βούλεται πάντα ταῦτα ἔχειν ἐν ἑαυτῷ· πρότασιν, ἔκθεσιν, διορισμόν, κατασκευήν, ἀπόδειξιν, συμπέρασμα.

Κάθε πρόβλημα και κάθε θεώρημα, που έχει συμπληρωθεί με όλα τα μέρη του, πρέπει να περιλαμβάνει την πρόταση (εκφώνηση), την έκθεση, το διορισμό, την κατασκευή, την απόδειξη και το συμπέρασμα

Ο Πρόκλος αναφέρεται στο απόσπασμα αυτό στην ενότητα εκφώνηση-απόδειξη μιας πρότασης. Όμως, πέρα από τα μέρη αυτά του μαθηματικού λόγου, στο προσκήνιο της ιστορίας είχαν ήδη εμφανιστεί και άλλα μέρη. Η έννοια του ορισμού, έχει γίνει αντικείμενο μελέτης από τους Σοφιστές και τους Προσωκρατικούς φιλόσοφους, ήδη από το 5^ο αιώνα π.Χ., ενώ η έννοια και η αναγκαιότητα των αξιωμάτων (ως υποθέσεις, ή αρχές, ή αιτήματα) καταχτήθηκαν την ίδια εποχή.

Έτσι ως μέρη του μαθηματικού λόγου διακρίνουμε τα: Ορισμός, Αξίωμα, Θεώρημα, (Πόρισμα, Λήμμα), Πρόβλημα, Έκθεση, Διορισμός, Κατασκευή, Απόδειξη, Συμπέρασμα, Σχόλιο και Άσκηση. Στα 2000 σχεδόν χρόνια που πέρασαν από τότε, τα μαθηματικά αν και έχουν εξελιχθεί αλλάξει και διαφοροποιηθεί πολύ, ωστόσο διατηρούν τα ίδια μέρη αν και με κάποιες διαφοροποιήσεις.

6.2.1 Ο Ορισμός.

Αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο ότι η μαθηματική γλώσσα γεννήθηκε μέσα στα πλαίσια της φυσικής γλώσσας, με σημασιολογικές διαφοροποιήσεις των εκφραστικών μέσων της καθομιλουμένης. Δηλαδή η μαθηματική γλώσσα, ως ειδική γλώσσα, διαφέρει στην πρώτη της μορφή από την καθομιλουμένη μόνο ως προς το σύστημα των σημασιολογικών κανόνων. Οι σημασιολογικές αυτές διαφοροποιήσεις δεν ήταν τίποτε περισσότερο από συμφωνίες για το νέο

περιεχόμενο που έπρεπε να αποδίδετε από τους μαθηματικούς σε ορισμένες λέξεις. Η διατύπωση των συμφωνιών αυτών είναι οι *μαθηματικοί ορισμοί*. Για παράδειγμα η λέξη *κύκλος* υπάρχει στην ελληνική γλώσσα από την εποχή που φτιάχτηκαν τα Ομηρικά έπη. Υπάρχει δηλαδή στη γλώσσα, με πεδίο σημασίας το περιβάλλον δραστηριότητας του ανθρώπου, πολύ πριν από την εμφάνιση του ορισμού που συναντάμε στα στοιχεία του Ευκλείδη. Αντίθετα, ο ορισμός:

Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἢ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἅφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν.

Κύκλος είναι ένα σχήμα επίπεδο που περιέχεται από μια γραμμή [η οποία ονομάζεται περιφέρεια], προς την οποία τα ευθύγραμμα τμήματα που φτάνουν, αρχίζοντας από ένα εσωτερικό του σχήματος σημείο, είναι ίσα μεταξύ τους.

έχει πεδίο σημασίας το σύμπαν των Μαθηματικών αντικειμένων.

Έτσι ο μαθηματικός ορισμός, από τη φύση του, οριοθετεί σημασιολογικά τη μαθηματική γλώσσα. Βρίσκεται λοιπόν στο επιμαθηματικό επίπεδο, αφού πρόκειται για συμφωνία μεταξύ ανθρώπων για το πώς θα ονομάζουν κάποιο μαθηματικό αντικείμενο. Βεβαίως είναι δυνατόν να περιέχει ολόκληρες αποφάνσεις στο μαθηματικό επίπεδο.

Παράδειγμα1: *Μια πράξη $*$ σένα σύνολο $\mathcal{A}$ λέγεται αντιμεταθετική αν και μόνο αν για κάθε α, β από το $\mathcal{A}$, $\alpha * \beta = \beta * \alpha$*

Η λέξη *ορισμός* είναι ένας νεολογισμός του 4^{ου} π.Χ. αιώνα που οφείλεται κατά πάσα πιθανότητα στον Αριστοτέλη, ο οποίος είχε επεξεργαστεί στο έργο το *Τοπικά* μια ολοκληρωμένη θεωρία ορισμών.

Ο Αριστοτέλης εξάλλου είχε διαπιστώσει ότι ο ορισμός δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη του οριζόμενου. Δεν αρκεί, γράφει στα αναλυτικά του, να πει κανείς τι είναι κάτι αλλά και ότι υπάρχει, αφού κάλλιστα μπορεί κάποιος να ορίσει τι είναι τραγέλαφος, ότι είναι ένα ζώο που είναι το μισό τράγος και το μισό έλαφος, αυτό όμως καθόλου δε σημαίνει ότι ο τραγέλαφος υπάρχει. Η ύπαρξη εξασφαλίζεται είτε από τα αξιώματα είτε από τις αποδείξεις. Στα πλαίσια μιας επιστήμης είναι αδύνατον να οριστούν όλα, γιατί αυτό θα συνεπάγονταν μια ατέρμονη διαδικασία. Ορισμένοι όροι δεν ορίζονται. Αποτελούν τους *αρχικούς όρους*.

Με την εξέλιξη του μαθηματικού λόγου έχουν διαμορφωθεί δύο τύποι ορισμών:

α) Ο *απλός ονοματισμός*, αυτός δηλαδή που αποδίδει όνομα σε ένα γνωστό και συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο. Η υπόσταση του αντικειμένου αυτού είναι εξασφαλισμένη από άλλα αντικείμενα.

Παραδείγματα:

1. *Η ευθεία που ενώνει τις απέναντι γωνίες ενός παραλληλογράμμου ονομάζεται διαγώνιος*
2. *Το σημείο τομής των υψών ενός τριγώνου λέγεται ορθόκεντρο.*
3. *Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια δύο, ή και περισσότερων φυσικών αριθμών, λέγεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο. (ΕΚΠ)*

β) Ο *πλήρης ορισμός*, είναι αυτός που θέτει μια συμφωνία για το περιεχόμενο μιας λέξης ή μιας περιφράσης, την οποία ο συνομιλητής, ή ο αναγνώστης πρέπει αναγκαστικά να αποδεχτεί. Υπάρχουν δε δύο ενδεχόμενα:

α) Η λέξη (όνομα του οριζόμενου) να αποτελεί δάνειο της ειδικής γλώσσας από τη φυσική που αποτελεί τη «μητρική» της. Στη περίπτωση αυτή, μέσω του ορισμού, έχουμε αλλαγή στο σημασιολογικό κανόνα της μητρικής, θεσπίζεται ένας νέος σημασιολογικός κανόνας, ο οποίος δίνει άλλο, νέο, περιεχόμενο στη λέξη.

β) Η λέξη (όνομα του οριζόμενου) να είναι ένας νεολογισμός. Τότε απλώς τίθεται και ο κανόνας που δίνει περιεχόμενο στο νεολογισμό αυτό.

Σε κάθε περίπτωση τίθεται μια συνωνυμία μεταξύ δύο αποφάνσεων. Η γενική μορφή είναι:

$$\mathcal{E}_1 \text{ αν και μόνο αν } \mathcal{E}_2$$

Όπου $\mathcal{E}_1$ είναι μια φράση της μορφής *[Ο Α είναι (ή λέγεται) Β]* και $\mathcal{E}_2$ μια απόφαση που περιγράφει την (ή τις) ιδιότητα (-ες) που πρέπει να πληρεί ο Α.

Σχόλιο 3.2: Η έκφραση *|αν και μόνο αν|* δεν δηλώνει εδώ λογική ισοδυναμία, όπως συμβαίνει στα θεωρήματα. Ο λόγος είναι ότι η $\mathcal{E}_1$ και η $\mathcal{E}_2$ ανήκουν σε διαφορετικά γλωσσολογικά επίπεδα. Η $\mathcal{E}_1$ ανήκει στο επιμαθηματικό ενώ η $\mathcal{E}_2$ στο μαθηματικό επίπεδο από τη στιγμή που αποτελεί δήλωση μαθηματικών ιδιοτήτων. Πρόκειται λοιπόν για **συνωνυμία** και όχι για λογική ισοδυναμία.

Παράδειγμα1: Μια πράξη $*$ σ'ένα σύνολο $\mathcal{A}$ λέγεται *αντιμεταθετική* αν και μόνο αν για κάθε α, β από το $\mathcal{A}$, $\alpha*\beta=\beta*\alpha$

Εδώ η $\mathcal{E}_1$ είναι η $| \text{Μια πράξη } * \text{ είναι αντιμεταθετική στο } \mathcal{A} |$ και $\mathcal{E}_2$ η $| (\forall \alpha \in \mathcal{A}) (\forall \beta \in \mathcal{A}) [\alpha*\beta=\beta*\alpha] |$

Παράδειγμα2: Ένα σύνολο $\mathcal{A}$ ονομάζεται *επαγωγικό σύνολο* αν και μόνο αν, $\emptyset \in \mathcal{A}$ και $\forall a, a \in \mathcal{A} \rightarrow a^+ \in \mathcal{A}$

Σχόλιο: Είναι φανερό ότι στην πράξη, δηλαδή στα μαθηματικά κείμενα, δεν ακολουθείται γενικά η προηγούμενη περιγραφή, ούτε ως προς τη δομή ούτε ως προς τα εκφραστικά μέσα. Αυτό εξαρτάται από το συγγραφέα. Σχετικά με τη δήλωση της συνωνυμίας, σε καλογραμμένα μαθηματικά κείμενα, πολλοί συγγραφείς που χρησιμοποιούν σύμβολα, για τη φράση

$$|\mathcal{E}_1 \text{ αν και μόνο αν } \mathcal{E}_2|$$

χρησιμοποιούν διαφορετικό συμβολισμό όταν πρόκειται για θεώρημα ($\mathcal{E}_1 \leftrightarrow \mathcal{E}_2$) και διαφορετικό όταν πρόκειται για ορισμό ($\mathcal{E}_1 \leftrightarrow_{\text{op}} \mathcal{E}_2$) ή ($\mathcal{E}_1 \Leftrightarrow_{\text{op}} \mathcal{E}_2$)

Παράδειγμα3: Ένα σημείο ξ , που μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει σε ένα σύνολο S , λέγεται *σημείο συσσώρευσης του S* , αν κάθε περιοχή του ξ οσοδήποτε μικρή, περιέχει ένα σημείο του συνόλου διαφορετικό από το ξ

Εδώ ο συγγραφέας χρησιμοποιεί τον σύνδεσμο *αν* που δηλώνει συνεπαγωγή, δηλαδή δεν κυριολεκτεί. Όμως επειδή το κείμενο αυτό φέρει τον τίτλο *Ορισμός* ο εκπαιδευμένος αναγνώστης θα πρέπει να κατανοήσει $| \text{αν και μόνο αν} |$ δηλαδή συνωνυμία.

6.2.2 Το Αξίωμα

Η αναγκαιότητα να τίθενται αξιώματα ήρθε στο προσκήνιο της ιστορίας μόλις κατακτήθηκε η έννοια της απόδειξης και παγιώθηκε η τάση να αποδεικνύονται όλα. Αρχικά, την εποχή για παράδειγμα του Πλάτωνα, τα αξιώματα μαζί με τους ορισμούς, αποτελούσαν τις *Αρχές* της επιστήμης, ή τις *υποθέσεις* όπως συνήθως τις αποκαλούσε ο Πλάτωνας, ή τα *αναπόδευκτα*, όπως τα αποκαλούσαν οι Στωικοί. Ο Αριστοτέλης ήταν ο πρώτος που διέκρινε τη διαφορετικότητα του Ορισμού από τις υπόλοιπες αρχές. Οι ορισμοί αποτελούν συμφωνίες που αφορούν τα ονόματα και δεν αποδεικνύονται γιατί δεν είναι αποφάνσεις που πρέπει κανείς να πει αν είναι αληθείς ή όχι. Ή τους αποδέχεται κανείς και συμμετέχει στη συζήτηση ή όχι. Αντίθετα τα Αξιώματα, είναι

αποφάνσεις, εκφράζουν μαθηματικά γεγονότα που πρέπει κανείς να δεχτεί ως (πραγματοποιούμενα) αληθινά, αν θέλει να "συμμετάσχει στη παραπέρα συζήτηση". Δεν αποδεικνύονται γιατί δεν είναι δυνατός να τα αποδεικνύει κανείς όλα. Όπως ήδη ο Αριστοτέλης είχε διαπιστώσει, κάθε επιστήμη έχει τα δικά της αξιώματα, τις δικές της ειδικές έννοιες, οι οποίες αναφέρονται στην επιστήμη αυτή και μόνο. Η πρώτη τέτοια ομάδα αποφάνσεων είναι τα πέντε αιτήματα του Ευκλείδη, τα οποία αφορούν τη γεωμετρία. Για τα Μαθηματικά της εποχής του Ευκλείδη υπήρχε άλλη μια ομάδα αποφάνσεων που αποτελούσε μέρος των αρχών, οι κοινές έννοιες. Επρόκειτο για αποφάνσεις που ήταν κοινές σε όλες τις επιστήμες, όπως η απόφαση που θέτει τη μεταβατική ιδιότητα της ισότητας που είναι η πρώτη κοινή έννοια στα Στοιχεία του Ευκλείδη:

Αυτά που είναι ίσα προς το ίδιο είναι και μεταξύ τους ίσα

Το πρόβλημα της θεμελίωσης απασχολούσε τους μαθηματικούς ήδη από την εποχή του Ιπποκράτη του Χίου (5^{ος} αιώνας π.Χ.) ο οποίος έθετε κάποιες προτάσεις σαν αρχές και βασιζόμενος σε αυτές πραγματοποιούσε τις αποδείξεις του [SZABO1977,269]. Ο Πλάτωνας στην Πολιτεία [Πολιτεία,510 c-d] δίνει την εξής περιγραφή:

Ξέρεις, υποθέτω, πως αυτοί που καταγίνονται με τις γεωμετρίες, με τα μαθηματικά και τα παρόμοια, παίρνοντας ως βάση το άρτιο και περιττό, τα τρία είδη της γωνίας κι' όσα άλλα τέτοια, αναλόγως με την απόδειξη που ζητούν, τα θεωρούν αυτά σαν θεμέλια, που δεν αξίζει τον κόπο να δίνουν λόγο γι' αυτά ούτε στον εαυτό τους ούτε στους άλλους, σαν να' ναι πράγματα ολοφάνερα στον καθένα, και αρχίζοντας από αυτές τις αρχές και περνώντας έπειτα τα επίλοιπα, φτάνουν στο τέλος με λογική συνέπεια σε κείνο που ξεκίνησαν ν' αποδείξουν.[μετάφραση Ι. Γρυπάρης].

Ο Αρχιμήδης συμπλήρωσε το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη με άλλα 5 αξιώματα, στην αρχή του έργου του «Περί σφαίρας και κυλίνδρου».

6.2.3 Η Πρόταση

α) Στον αρχαίο Ελληνικό μαθηματικό λόγο: Οι εκφωνήσεις των προτάσεων, ακολουθούνται πάντα από τις αποδείξεις.

Σύμφωνα με το περιεχόμενό τους οι προτάσεις είναι δύο ειδών: η **πρόταση Θεώρημα** και η **πρόταση Πρόβλημα**. Τα θεωρήματα λένε για το τι συμβαίνει, δηλώνουν δηλαδή κάποιο μαθηματικό γεγονός, ενώ τα προβλήματα λένε τι πρέπει να γίνει, δηλαδή να βρεθεί, να κατασκευασθεί.

Παραδείγματα:

Οι παρακάτω προτάσεις είναι θεωρήματα.

Στα παραλληλόγραμμα, οι απέναντι πλευρές και γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους και η διαγώνιος τα διχοτομεί.

[Ευκλείδης I,34]

Τα παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι μεταξύ τους ίσα.

[Ευκλείδης I,35]

Οι (φυσικοί) αριθμοί που είναι πρώτοι μεταξύ τους είναι οι ελάχιστοι από όλους όσους έχουν τον ίδιο λόγο.

[Ευκλείδης VII,21]

Οι πρώτοι αριθμοί είναι περισσότεροι από οποιοδήποτε δοσμένο πλήθος πρώτων αριθμών. (ή Οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι)

[Ευκλείδης IX, 20]

Ενώ οι παρακάτω προτάσεις είναι προβλήματα.

Πάνω σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευασθεί ισόπλευρο τρίγωνο.

[Ευκλείδης I, 1]

Από δοθέν σημείο να κατασκευασθεί ευθεία, παράλληλος προς δοθείσα ευθεία.

[Ευκλείδης I, 31]

Δοθέντων τριών αριθμών που δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους, να βρεθεί ο Μ.Κ.Α. τους.

[Ευκλείδης VII, 3]

Δοθέντων δύο αριθμών να βρεθεί το Ε.Κ.Π. τους.

[Ευκλείδης VII, 34]

Τα προβλήματα, λοιπόν κατά την κλασική αρχαιότητα, εκφράζουν την απαίτηση να βρεθεί ή να κατασκευαστεί κάποιο μαθηματικό αντικείμενο. Μορφολογικά διαφέρουν από τα Θεωρήματα, αφού θεωρήματα διατυπώνονται ως αποφάνσεις ή ως υποθετικοί λόγοι, ενώ τα προβλήματα ως ασθενείς προστακτικές. Ο Πρόκλος αναφέρει ότι οι προτάσεις διακρίνονταν σε δύο κατηγορίες τα θεωρήματα και τα προβλήματα. Εκθέτει επίσης ορισμένες απόψεις που είχαν διατυπωθεί πάνω στο θέμα αυτό [ΠΡΟΚΛ450,203]. Αναφέρουμε ενδεικτικά την άποψη του Ποσειδώνιου και των μαθητών του [ΠΡΟΚΛ450,80] οι οποίοι διέκριναν και τις γραμματικοσυντακτικές διαφορές μεταξύ εκφωνήσεων θεωρημάτων και προβλημάτων:

Οι γύρω από τον Ποσειδώνιο, την μεν ονόμαζαν πρόταση θεώρημα, στην οποία αναζητείται αν υπάρχει ή όχι κάτι, την δε πρόταση πρόβλημα στην οποία ζητείται τι υπάρχει ή τι είναι κάτι, και για μεν την πρόταση που είναι θεώρημα έλεγαν ότι πρέπει να δομείται σαν απόφαση για δε την πρόταση πρόβλημα σαν ερώτηση.

Η πρόταση στον Αρχαίο Ελληνικό Μαθηματικό Λόγο αποτελεί την εκφώνηση του θεωρήματος ή του προβλήματος. Στις εκφωνήσεις δεν υπάρχουν γράμματα, ως σύμβολα μεταβλητών, τα μαθηματικά αντικείμενα εμφανίζονται με τα φυσικά τους ονόματα και οι ποσοδείξεις, όταν εκφράζονται, φέρονται, πάνω σ' αυτά.

Ωστόσο, από σημασιολογική σκοπιά και τα προβλήματα είναι ουσιαστικά θεωρήματα και μάλιστα θεωρήματα ύπαρξης. Η ύπαρξη ενός μαθηματικού αντικειμένου εξασφαλίζεται είτε από τα αξιώματα είτε από την κατασκευή του.

Τα *πορίσματα* και τα *λήμματα* ήταν προτάσεις δευτερεύουσας σημασίας. Το μεν πόρισμα είναι άμεση συνέπεια κάποιας πρότασης, του οποίου η απόδειξη, ή η κατασκευή, είναι προφανής και κατά κανόνα δεν εκτίθεται από τον συγγραφέα. Το δε λήμμα είναι μια πρόταση, που λαμβάνεται ως αληθείς μέσα στα πλαίσια μιας απόδειξης. Η απόδειξη του λήμματος ή έχει γίνει σε κάποιο άλλο έργο, ή εκτίθεται από τον συγγραφέα, είτε πριν είτε μετά την απόδειξη της πρότασης στην οποία χρησιμοποιείται. Το πόρισμα στα Στοιχεία του Ευκλείδη εισάγεται, κατά κανόνα, από την επιμαθηματική φράση *[Από αυτά είναι φανερό ότι]*. Την ίδια περίπου πρακτική ακολουθεί και ο Αρχιμήδης. Τα λήμματα, εκφωνούνται όπως οι προτάσεις και, εάν δεν έχουν αποδειχθεί σε κάποιο άλλο έργο ακολουθεί η απόδειξή τους (ή η κατασκευή), εάν έχουν ήδη αποδειχθεί μνημονεύεται το έργο στο οποίο εκτίθεται η απόδειξη.

Πόρισμα:

Από αυτό είναι φανερό ότι, η πλευρά του κανονικού εξαγώνου είναι ίση με την ακτίνα του (περιγεγραμμένου) κύκλου.

[Ευκλείδης VII, 34]

Λήμμα:

Το ότι, εάν δύο ευθύγραμμα σχήματα είναι ίσα και όμοια οι ομόλογες πλευρές τους είναι ίσες μεταξύ τους, θα το αποδείξουμε έτσι.

[Ευκλείδης VII, 34]

Στο σύγχρονο μαθηματικό λόγο οι όροι: *θεώρημα, πόρισμα, λήμμα* διατηρούν το ίδιο περιεχόμενο, ενώ *πρόβλημα* ονομάζεται συνήθως μια εκφώνηση που αναφέρεται σε συγκεκριμένα στοιχεία της πραγματικότητας.

Ως προς τη λογική τους δομή τα θεωρήματα στα Στοιχεία του Ευκλείδη έχουν τις εξής μορφές:

$$(\forall x) \dots (\forall z) R(x, \dots z),$$

$$(\forall x) \dots (\exists z) R(x, \dots z),$$

$$(\exists z) \dots R(z, \dots)$$

Παραδείγματα

$$1) \text{ Κάθε πρώτος αριθμός, είναι πρώτος προς κάθε αριθμό του οποίου δε διαιρεί: } (\forall x)(\forall z)[\neg(x|z) \rightarrow (x,z)=1]$$

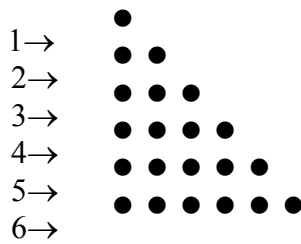
[Ευκλείδης VII, 28]

$$2) \text{ Κάθε αριθμός έχει πρώτο διαιρέτη: } (\forall x)(\exists y)[(\forall z)(\forall w)[y=zw \rightarrow (z=1 \vee w=1)] \wedge (x|z)]$$

6.2.4 Η Έκθεση και ο Διορισμός.

Η **έκθεση** αποτελεί προϊόν του περάσματος από την επαλήθευση στη συστηματική απόδειξη. Όμως ως όρος υπάρχει ήδη στις αριθμητικές δραστηριότητες των Πυθαγορείων.

Είναι γνωστό ότι οι πυθαγόρειοι συνήθιζαν να αναπαριστούν τους αριθμούς με ψηφίδες, δηλαδή με μικρά βότσαλα (παραστατικοί αριθμοί) πάνω σε μια οριζόντια σανίδα. Όλο αυτό το σύστημα των ψηφίδων και της σανίδας ονομάζονταν **ψηφοφορία**. Αναπαριστούσαν λοιπόν τους αριθμούς τοποθετώντας ψήφους στη σειρά πάνω στη σανίδα:



Αλλά ταυτόχρονα το 4 και το 6 αναπαρίστανται:



Είχαν δε διαπιστώσει ότι όλοι οι αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν με ψηφίδες στη σειρά, κάθε δε επόμενος του δύο, όπως μας πληροφορεί ο Νεοπυθαγόρειος Νικόμαχος, φτιαχνόταν από τον προηγούμενο με την προσθήκη μιας ψηφίδας πάνω στην ίδια ευθεία:

Όλοι οι αριθμοί, αρχίζοντας από το δύο, είναι γραμμικοί και με την πρόσθεση της μονάδος προς μία και την αυτή κατεύθυνση προχωρούν

[Νικόμαχος, *Αριθμητική εισαγωγή*, 2, 3,11]

Η αναπαράσταση αυτή με ψηφίδες ενός συγκεκριμένου αριθμού ονομαζόταν **έκθεση**.

Η λέξη έκθεση, παράγεται από το ρήμα εκθέτω, και δηλώνει την πράξη του εκθέτειν. Εκθέτω (*έκ+θέτω*), στη φυσική γλώσσα, σήμαινε θέτω έξω από τον οίκο ή από τα τείχη της πόλης, σε κοινή θέα, ένα παιδί που δεν αναγνωρίζεται από τον πατέρα κατά τη σχετική τελετή αναγνώρισης που γίνονταν μετά τη γέννα. Ενώ στις εμπειρικές διαδικασίες των Πυθαγόρειων, σήμαινε την παρουσίαση ενός αριθμού μέσω της αναπαράστασής του με ψηφίδες, μια πράξη με υλικά αντικείμενα.

Στα συγκροτημένα σε παραγωγική επιστήμη μαθηματικά ο όρος έχει πιο αφηρημένο περιεχόμενο: Από το εκτεταμένο απόσπασμα του Πρόκλου που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, το οποίο περιγράφει αναλυτικά τα μέρη του μαθηματικού λόγου, *□κθεσις* ήταν το μέρος εκείνο του μαθηματικού λόγου το οποίο έπεται της εκφώνησης και προηγείται της απόδειξης.

Πρόκειται για φράσεις επιμαθηματικού χαρακτήρα οι οποίες από καθαρά λογικογλωσσική σκοπιά παίζουν τον εξής ρόλο: Παρουσιάζουν τα σύμβολα μεταβλητών με τα οποία σημαίνονται τα μαθηματικά αντικείμενα που εμφανίζονται στην εκφώνηση, και ενδεχόμενα κάποια άλλα βοηθητικά, και κλείνεται η συμφωνία με τον αναγνώστη, κατά κανόνα μέσω της προστακτικής του *είμι, έστω* ή *έστωσαν*, ότι τα σύμβολα αυτά των μεταβλητών θα θεωρούνται καθολικά ποσοδειγμένα. Δηλαδή και εδώ δηλώνεται από την έκθεση μια πράξη με την οποία έρχονται στο προσκήνιο τα μαθηματικά αντικείμενα πάνω στα οποία θα αναπτυχθεί ο συλλογισμός της

απόδειξης. Και εδώ τα μαθηματικά αντικείμενα **έκ-τίθενται**, ωστόσο ενώ η πράξη αυτή στο προεπιστημονικό στάδιο ήταν **υλική** τώρα είναι **λογικογλωσσική** !!!

Ο **Διορισμός**, στα πρώτα στάδια του μαθηματικού λόγου, ακολουθούσε την έκθεση και αποτελούσε μια αναδιατύπωση της εκφώνησης με τη βοήθεια των (ή του) συμβόλων μεταβλητών που έχουν συμφωνηθεί στην έκθεση. Με τη μορφή αυτή, και στην ίδια θέση, εμφανίζεται και σήμερα όταν η προς απόδειξη πρόταση είναι διατυπωμένη εξολοκλήρου σε καθομιλούμενο λόγο, χωρίς κανένα σύμβολο. Πρόκειται για την πρόταση απαλλαγμένη από τους ποσοδείκτες, ώστε να ξεκινήσει ο αποδεικτός συλλογισμός ο οποίος θα καταλήξει στο προσυμπέρασμα.

Σε εκφωνήσεις θεωρημάτων που περιέχουν σχέσεις σε συμβολική γλώσσα, όταν δηλαδή έχουμε μείγμα φυσικού και τυπικού μαθηματικού λόγου, η εκφώνηση αρχίζει με την έκθεση η δε διατύπωση του θεωρήματος που ακολουθεί δεν είναι παρά ο διορισμός.

Σχόλιο (διδασκικές συνέπιες) Η αναγκαιότητα της έκθεσης δύσκολα γίνεται σήμερα κατανοητή από τους μαθητές. Ας αναδείξουμε αυτήν την αναγκαιότητα με τη βοήθεια ενός παραδείγματος. Ας υποθέσουμε πως πρέπει να πείσουμε κάποιο συνομιλητή μας ότι:

(1) *Κάθε φυσικός αριθμός μικρότερος του 20 έχει πρώτο διαιρέτη.*

(2) *Κάθε φυσικός αριθμός μικρότερος του 100 έχει πρώτο διαιρέτη.*

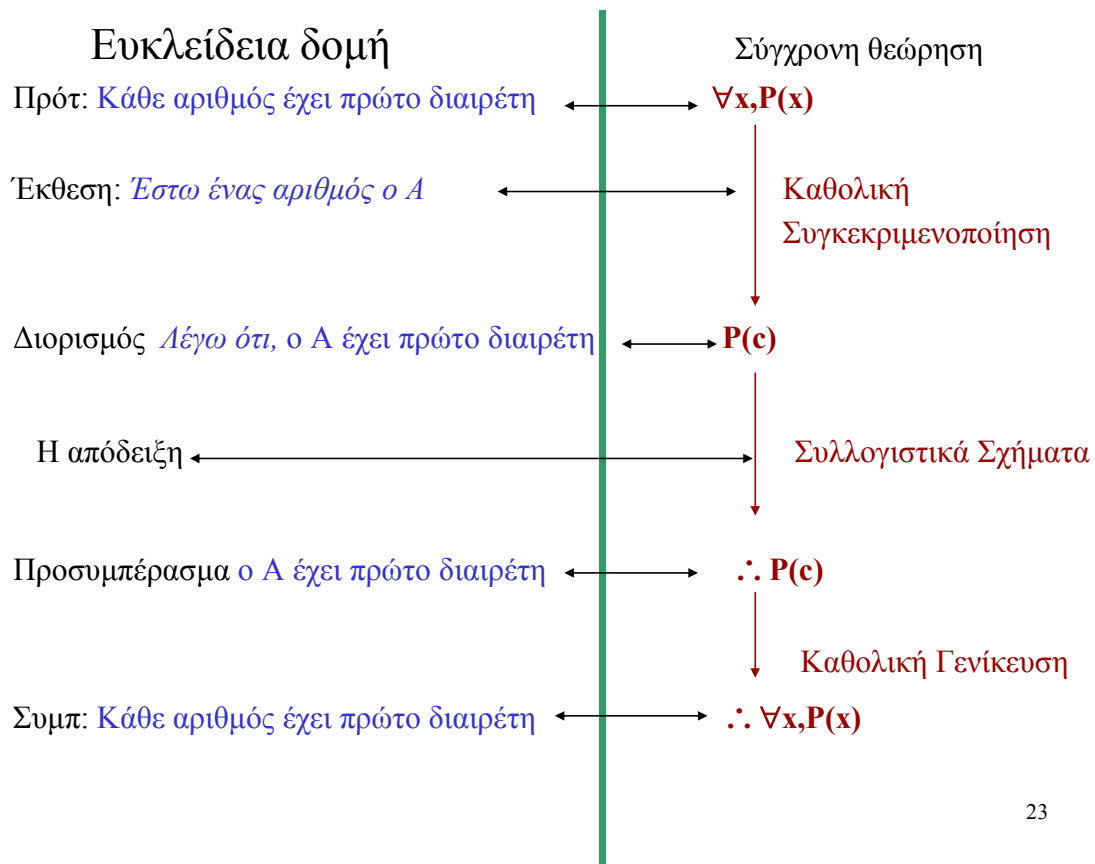
Στην (1), εξετάζοντας έναν-ένα τους αριθμούς, με 20 επαληθεύσεις έχουμε πείσει απόλυτα το συνομιλητή μας. Στην (2) επίσης αλλά, με την ίδια μέθοδο, απαιτούνται 100 επαληθεύσεις.

Αν όμως πρέπει να πείσουμε για την αλήθεια του θεωρήματος:

Κάθε φυσικός αριθμός έχει πρώτο διαιρέτη

μέθοδος αυτή δεν είναι εφαρμόσιμη. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε εδώ είναι να παρουσιάσουμε έναν αριθμό, τον οποίο θα συμβολίσουμε με ένα γράμμα, ας πούμε το $\mathcal{A}$, και θα κλείσουμε μια συμφωνία με το συνομιλητή μας ότι αυτός μπορεί να είναι οποιοσδήποτε και γι' αυτό εξάλλου τον συμβολίζουμε με ένα γράμμα. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε μετά είναι να αξιοποιήσουμε όλα όσα ξέρουμε για τους αριθμούς και να πείσουμε το συνομιλητή μας ότι ο $\mathcal{A}$ έχει ένα διαιρέτη που είναι πρώτος. Μόλις αυτό γίνει εφικτό δεν έχουμε παρά να θυμίσουμε τη συμφωνία πως στη θέση του $\mathcal{A}$ μπορεί να είναι και οποιοσδήποτε άλλος αριθμός. Οπότε το τελικό συμπέρασμα αυτής της

συζήτησης μπορεί να είναι πως κάθε αριθμός έχει πράγματι κάποιο πρώτο διαιρέτη. Η ροή της συζήτησης αυτής δεν ήταν άλλη από τη ροή μιας Ευκλείας απόδειξης:



23

Πρόκειται για την πιο κατάλληλη δομή για την εισαγωγή ενός μαθητή στη διαδικασία των αποδείξεων, για διδακτική δηλαδή αξιοποίηση, γιατί:

- Αξιοποιεί τα εκφραστικά μέσα της φυσικής γλώσσας, με τα οποία σκέφτεται ο μαθητής
- Κρατά λειτουργικά, σε πρώτο πλάνο, όλα εκείνα τα λογικά στοιχεία τα νομιμοποιητικά της απόδειξης.

Ο όρος που προσιδιάζει στη δομή αυτή είναι, Φυσική Απόδειξη

Η λογικογλωσσική της δομή είναι:



22

Μετά την ανάπτυξη της συμβολικής μαθηματικής γλώσσας και του αλγεβρικού λογισμού τα γράμματα ως μεταβλητές είναι απαραίτητα στην εκφώνηση του θεωρήματος. Το ιστορικά αντικειμενικό αυτό γεγονός έχει ορισμένες συνέπειες:

1. Μετατόπισε την έκθεση, η οποία ενσωματώνεται κατά κανόνα στην εκφώνηση του θεωρήματος μαζί με το διορισμό. Με άλλα λόγια, καταργήθηκε η κλασική εκφώνηση ο θεωρήματος η οποία αντικαταστάθηκε από την ενότητα έκθεσης και διορισμού. Εξάιρεση αποτελεί η Ευκλείδεια Γεωμετρία, όπου υπάρχει η δυνατότητα κλασικών εκφωνήσεων. και εν πολλοίς την αριθμοθεωρία (ιδιαίτερα όταν μένουμε στους φυσικούς)
2. Στερεί από τους μαθητές τη δυνατότητα να πραγματοποιήσουν οι ίδιοι το λογικογλωσσικό παιχνίδι της έκθεσης και, μετά την επιχειρηματολογία για το συγκεκριμένο, να πραγματοποιήσουν οι ίδιοι την καθολική γενίκευση.

Συνοψίζουμε λοιπόν για το ρόλο της έκθεσης:

- (1) Παρουσιάζει τα (ή το) μαθηματικά αντικείμενα στα οποία αναφέρεται η πρόταση καθώς και τα σύμβολα (κατά κανόνα γράμματα από κάποιο αλφάβητο) τα οποία αποτελούν τα ονόματα των αντικειμένων που εισάγονται.

- (2) Θέτει ως όρο (υποθέτει) ότι είναι καθολικά ποσοδευμένα, και στη συνέχεια όπου και αν εμφανίζονται θα θεωρούνται σαν τέτοια. Αποτελεί λοιπόν μια Παρουσίαση-καθολική-ποσόδειξη (παρουσίαση- $\forall$ - ποσόδειξη ή συνοπτικά Π- $\forall$ -Π) για τα (ή το) σύμβολα μεταβλητής.
- (3) Σχετικοποιεί τις ποσοδείξεις, όταν χρειάζεται. Περιορίζει δηλαδή τις μεταβλητές να παίρνουν τιμές σε ένα υποσύνολο του βασικού συνόλου της θεωρίας μέσα στην οποία δουλεύουμε.

Σχόλιο: Το ενδιαμέσο μεταξύ έκθεσης και διορισμού σύνταγμα $|λέγω\ ότι|$ εκφράζει μια αναφορά με την οποία γίνεται το πέρασμα από το επιμαθηματικό στο μαθηματικό επίπεδο, έναν ισχυρισμό ότι η πρόταση που ακολουθεί είναι αληθινή. Είναι χαρακτηριστικό ότι στα κατασκευαστικά προβλήματα, όπου από τη φύση των φράσεων δεν έχουμε επάνοδο στο μαθηματικό επίπεδο, το αντίστοιχο σύνταγμα $|δεν\ δη|$ (*πρέπει λοιπόν*) δεν εκφράζει αναφορά αλλά ασθενή προσταγή.

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται τα διάφορα είδη από εκθέσεις, διορισμούς και συνδιασμούς των δύο, στο βιβλίο της Γεωμετρίας για τις τάξεις β΄ και γ΄ Λυκείου, έκδοση 2006. Μόνο το 12% των εκφωνήσεων των θεωρημάτων έχουν πλήρη διατύπωση της έκθεσης και του διορισμού.

Είδος έκθεσης—διορισμού	%
Πλήρης (έκθεση +διορισμός)	12,5
Χωρίς έκθεση, με σχετικοποίηση της $\forall$ -Ποσόδειξης	10,5
Έκθεση χωρίς διορισμό	41
Χωρίς έκθεση χωρίς διορισμό	22
Διορισμό πριν από την έκθεση	4,7
Χωρίς έκθεση	51,3 ₂₈

6.2.5 Η Κατασκευή

Πρόκλος: "η δε κατασκευή τα ελλείποντα τω δεδομένω προς την του ζητουμένου θήραν προστίθουσιν" Εμφανίζεται μόνο στα γεωμετρικά προβλήματα και στον μέ πρωτοεμφανισθέντα μαθηματικό λόγο αποτελεί μια σταδιακή θεώρηση των μερών του σχήματος το οποίο θεωρείται αυθύπαρκτο. Στο σύγχρονο Μ.Λ. κατασκευή είναι η περιγραφή της διαδικασίας χάραξης του σχήματος που γίνεται από αυτόν που λύνει το πρόβλημα.

6.2.6 Η Απόδειξη

2 Πρόκλος: "η δ'απόδειξις επιστημονικώς από τών ομολογηθέντων συνάγει το προκείμενον" Κατά τον Αριστοτέλη επιστημονικός είναι μόνο ο συλλογισμός που στηρίζεται σε αληθινές προκείμενες. Η απόδειξη λοιπόν είναι η ανάπτυξη του συλλογισμού που αρχίζει από ήδη αποδεδειγμένες προτάσεις ή από αξιώματα και οδηγεί στο προσυμπέρασμα που δεν είναι άλλο από την απόφαση που διατυπώνεται στον διορισμό.

6.2.7 Το Συμπέρασμα

Για τον Πρόκλο «το συμπέρασμα επιστρέφει στην πρόταση για να βεβαιώσει αυτό που έχει αποδειχθεί» Πράγματι το συμπέρασμα, που εμφανίζεται μόνο στα θεωρήματα, επιστρέφει στην πρόταση για να πιστοποιήσει, σαν αποτέλεσμα της απόδειξης, την αλήθεια της πρότασης την οποία κατά κανόνα επαναδιατυπώνει. Ωστόσο αυτό γίνεται σε δύο φάσεις. Σε μια πρώτη φάση διατυπώνεται ένα προσυμπέρασμα (η τελευταία απόφαση της απόδειξης) το οποίο βεβαιώνει την αλήθεια της πρότασης όπως αυτή έχει αναδιατυπωθεί στο διορισμό με τα ονόματα των συμβόλων μεταβλητών. Αποτελεί άμεση συνέπεια του συλλογισμού που αναπτύσσεται στην απόδειξη και εισάγεται με ένα άρα που εκφράζει μια συνεπαγωγή στο μαθηματικό επίπεδο. Αμέσως μετά εμφανίζεται το συμπέρασμα σαν επαναδιατύπωση της αρχικής πρότασης, εισάγεται πάλι με το άρα και πιστοποιεί την αλήθεια της πρότασης, κλείνοντας με το όπερ έδει δείξαι. Το άρα εδώ είναι καθαρά επιμαθηματικό η δε πιστοποίηση αντλεί την νομιμότητά της από την συμφωνία που έγινε στην έκθεση, ότι τα (ή το) σύμβολα μεταβλητών (που στο παράδειγμα ήταν το A) θεωρούνται καθολικά ποσοδευμένα.

6.2.8 Το Σχόλιο

Από τη φύση του είναι περίμαθηματικού ή επιμαθηματικού επιπέδου και παρέχει οποιασδήποτε μορφής πληροφορίες.

6.3. Τα εκφραστικά μέσα των λογικών στοιχείων της Μαθηματικής Γλώσσας.

Από τον ορισμό της τυπικής μαθηματικής γλώσσας (βλέπε κεφάλαιο 1) ως λογικά στοιχεία της γλώσσας χαρακτηρίζονται τα σύμβολα για τις λογικές πράξεις, άρνηση $\neg$, σύζευξη $\wedge$, διάζευξη $\vee$, συνεπαγωγή $\rightarrow$, ισοδυναμία $\leftrightarrow$. Η καθολική και η υπαρξιακή ποσόδειξη, ως γενικευμένη σύζευξη και διάζευξη αντίστοιχα, καθώς και τα σύμβολα μεταβλητών και οι παρενθέσεις. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τα εκφραστικά μέσα των λογικών αυτών στοιχείων στον μη τυπικό μαθηματικό λόγο.

Το πρόβλημα έχει δύο όψεις:

α) Όταν το μαθηματικό περιεχόμενο απαιτεί τη διατύπωση μιας λογικής πράξης, ποιά είναι τα εκφραστικά μέσα που χρησιμοποιούνται από τον Ελληνικό μαθηματικό λόγο.

β) Εάν τα ίδια αυτά εκφραστικά μέσα εμφανίζονται και με διαφορετικό περιεχόμενο (πολυσημία)

6.3.1 Η άρνηση: ($\neg A$)

Ας εξετάσουμε αρχικά πώς λειτουργεί η άρνηση στη φυσική μας γλώσσα, στο επίπεδο δηλαδή των αποφάνσεων. Ας δούμε ορισμένα παραδείγματα:

- 1) |είναι μέρα|, η άρνηση της είναι η |δεν είναι μέρα|
- 2) |είναι αναμμένο το φως|, η άρνηση της είναι η |δεν είναι αναμμένο το φως|
- 3) |είναι μαύρο το χιόνι|, η άρνηση της είναι η |δεν είναι μαύρο το χιόνι|
- 4) |το χιόνι είναι μαύρο|, η άρνηση της είναι η |το χιόνι δεν είναι μαύρο| ή |είναι λάθος ότι το χιόνι είναι μαύρο|
- 5) |Ο αριθμός 14 είναι άρτιος|, η άρνηση της είναι η |Ο αριθμός 14 δεν είναι άρτιος|

Από τα παραδείγματα δημιουργείται η εντύπωση ότι η άρνηση μιας πρότασης φτιάχνεται όταν προστά από το ρήμα γύρω από το οποίο συγκροτείται το ρηματικό σύνταγμα της φράσης τοποθετήσουμε ένα αρνητικό μόριο το *δεν*.

Όμως τα πράγματα δεν είναι έτσι!!

Η άρνηση της φράσης:

όλοι οι μη εμβολιασμένοι αρρώστησαν

θα ήταν η

όλοι οι μη εμβολιασμένοι δεν αρρώστησαν

Με άλλα λόγια

κανείς μη εμβολιασμένος δεν αρρώστησε

Όμως η άρνηση της αρχικής μας απόφασης είναι

είναι λάθος ότι όλοι οι μη εμβολιασμένοι αρρώστησαν

Με άλλα λόγια

Ορισμένοι μη εμβολιασμένοι δεν αρρώστησαν

ή

υπάρχουν μη εμβολιασμένοι που δεν αρρώστησαν

Είναι προφανές λοιπόν ότι δεν αρκεί η άρνηση μιας απόφασης να πλεονάζει απλά της απόφασης κατά ένα αρνητικό μόριο, θα πρέπει το αρνητικό μόριο να τίθεται στην αρχή της απόφασης, να προτάσσεται της απόφασης, όπως ακριβώς γίνεται με τις προτάσεις:

$$\neg : \Pi \rightarrow \Pi$$

$$A \mapsto \neg A$$

Αν έχουμε μια αποφαντική φράση που δηλώνει ένα γεγονός που συμβαίνει, για παράδειγμα την *είναι μέρα*, τότε η πρόταση A που εκφράζει η αποφαντική αυτή φράση είναι αλήθεια. Η άρνησή της, *δεν είναι μέρα* δηλώνει το αντίθετο του προηγούμενου γεγονότος, ένα γεγονός δηλαδή που δεν συμβαίνει, άρα η πρόταση που εκφράζει είναι η $\neg A$ και είναι ψευδής. Αφού όμως έχουμε δεχθεί ότι άλλη δυνατότητα από αυτές τις δύο δεν υπάρχει είναι φανερό ότι αν μια πρόταση είναι αληθινή τότε η άρνησή της είναι ψέμα και αν είναι ψέμα τότε η άρνηση της είναι αλήθεια.

Την παρατήρηση αυτή την είχαν κάνει οι Στωικοί ήδη από τον τρίτο αιώνα π.Χ.

Στον τυπικό μαθηματικό λόγο εκφράζεται από το σύμβολο $\neg$ που είναι ένα σύμβολο μιας θέσης, η οποία καταλαμβάνεται από μια πρόταση σ και δημιουργείται έτσι μια νέα πρόταση η $\neg \sigma$ ή από ένα τύπο της γλώσσας του λογισμού των κατηγορημάτων, για να δώσει ένα νέο τύπο. Δηλαδή το σύμβολο $\neg$ δεν τίθεται ποτέ μπροστά από ένα όρο.

Σε έναν όχι πολύ αυστηρά τυπικό μαθηματικό λόγο η άρνηση μπορεί να περάσει πάνω στο σύμβολο κατηγορήματος και να παράγει ένα νέο σύμβολο.

Παράδειγμα: Η Απόφαση $\neg(x \in A)$ είναι συνώνυμη της $x \notin A$, η $\neg(A = B)$ της $A \neq B$, και η $\neg(x \leq y)$ της $x \not\leq y$.

Στον μη τυπικό μαθηματικό λόγο οι εκφράσεις μέσω των οποίων δηλώνεται η άρνηση είναι:

α) *είναι λάθος ότι $\mathcal{E}$* . Όπου $\mathcal{E}$ απόφαση. Η μορφή αυτή μοιάζει συντακτικά με την χρήση του

συμβόλου $\neg$ της τυπικής μαθηματικής γλώσσας, ωστόσο πρόκειται για κάτι εντελώς διαφορετικό. Στην $|είναι\ λάθος\ ότι\ E|$ συνυπάρχουν δύο γλωσσολογικά επίπεδα, αυτό της E που πρέπει να είναι μαθηματικό - διαφορετικά η ακολουθία δεν ανήκει στον μαθηματικό λόγο - και αυτό της $είναι\ λάθος\ ότι\ που\ είναι\ επιμαθηματικής\ υφής$ αφού έχει ως πεδίο αναφοράς την E δηλώνοντας ότι η αληθοτιμή της είναι ψ . Παράδειγμα: $είναι\ λάθος\ ότι\ ο\ 3\ είναι\ άρτιος\ αριθμός$ η οποία είναι συνώνυμη με την $ο\ 3\ δεν\ είναι\ άρτιος\ αριθμός$ Σχόλιο: Η κατά λέξη απόδοση σε προφορικό λόγο κομματιών από την τυπική μαθηματική γλώσσα συνήθως οδηγεί σε βαρβαρισμούς, δηλαδή σε ακολουθίες λέξεων που παραβιάζουν του κανόνες σύνταξης της φυσικής γλώσσας. Για παράδειγμα η $\neg(x \in A)$ εκφωνείται ως [όχι x ανήκει άλφα] ενώ η σωστή εκφώνηση είναι [είναι λάθος ότι το x είναι στοιχείο του άλφα] ή [το x δεν είναι στοιχείο του άλφα]

β) $[O\Sigma + \text{δεν} + P\Sigma]$ Το μόριο δεν ως δηλωτικό της άρνησης είναι ενσωματωμένο με το ρηματικό σύνταγμα το οποίο εκφράζει το κατηγορημα της αποφαντικής φράσης.

Παράδειγμα: $ο\ 3\ δεν\ είναι\ άρτιος\ αριθμός$

Οι δύο αυτές δυνατότητες που παρέχει η φυσική γλώσσα είναι δυνατό να συνδιαστούν σε μια φράση για να εκφραστεί η διπλή άρνηση που ισοδυναμεί με κατάφαση.

γ) Το $\mu\eta$. Συνήθως τίθεται μπροστά από επίθετα που σχετικοποιούν ποσοδείξεις: $|μη\ παράλληλες|$, $|μη\ πρώτοι\ μεταξύ\ τους|$ κ.τ.λ.

6.3.2 Η σύζευξη: $(A \wedge B)$

α) Εκφράζεται από το $|και|$ ως εξής:

$$E_1 \text{ και } E_2$$

όπου οι E_1, E_2 είναι αποφάνσεις.

Μόνο σε τέτοιες εκφράσεις το $|και|$ είναι ο **λογικός σύνδεσμος της σύζευξης**.

β) Το $και$ όμως έχει και άλλες λειτουργίες και σημασίες μέσα στον μαθηματικό λόγο τις οποίες έχει κληρονομήσει από τη φυσική γλώσσα.

Το $και$ **παράγωγο** του λογικού συνδέσμου: *Τα σύνολα A και B είναι κενά.*

Στη φράση αυτή το $|και|$ φαίνεται να συνδέει τα ονόματα των δύο συνόλων. Ως τέτοιος λοιπόν δεν μπορεί να είναι σύνδεσμος γιατί θα έπρεπε να συνδέει αποφάνσεις. Αν ανατρέξουμε όμως στη βαθειά δομή της φράσης, αυτή είναι:

$$\text{Το σύνολο } A \text{ είναι κενό και το σύνολο } B \text{ είναι κενό}$$

Ή, αν την μεταγράψουμε στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων:

$$\mathcal{A}=\emptyset \text{ και } \mathcal{B}=\emptyset \text{ ή } \mathcal{A}=\emptyset \wedge \mathcal{B}=\emptyset$$

Είναι φανερό πως οι δυο αυτές φράσεις είναι συνώνυμες και πως το $|και|$ είναι ο λογικός σύνδεσμος ης σύζευξης.

Οι λειτουργίες αυτές καθώς και εύρεση των εκφραστικών μέσων των υπόλοιπων συνδέσμων σ' ένα μαθηματικό κείμενο δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες αν χρησιμοποιηθεί σωστά, ως εργαλείο ανάλυσης η Μαθηματική Λογική και εξετάζονται συστηματικά οι δύο όψεις (α), (β) του προβλήματος όπως τέθηκαν στην αρχή αυτής της παραγράφου.

6.3.3 Η διάζευξη: $(A \vee B)$

Η διάζευξη ξεχωρίζει τα γεγονότα με λειτουργώντας αντιθετικά με τη σύζευξη που τα ενώνει. Η διαδικασία αυτή έχει δύο εκδοχές, η μία έχει χαλαρό χαρακτήρα και είναι η απλή διάζευξη, αυτή που εκφράζεται με το «ή» ($A \vee B$), όπου επιτρέπεται η συναλήθευση των A και B , και η αποκλειστική, που εκφράζεται με το «ή...ή...» ($A \vee B$), όπου δεν επιτρέπεται η συναλήθευση των A και B .

Όμως η απλή διάζευξη εκφράζεται και μέσω της έκφρασης «είτε...είτε...». Πολλοί θεωρούν ότι η έκφραση αυτή δηλώνει αποκλειστική διάζευξη, όμως πρόκειται για μια ιδιαίτερη περίπτωση απλής διάζευξης. Πρόκειται για τη διάζευξη εκείνη η οποία προέρχεται από μια βαθιά δομή που είναι σύζευξη δύο συνεπαγωγών των οποίων οι υποθέσεις είναι διαφορετικές αλλά όχι αναγκαστικά η μια άρνηση της άλλης. Η διάζευξη αυτή παράγεται σύμφωνα με τη λογική ισοδυναμία: $[(A \rightarrow \Gamma) \wedge (B \rightarrow \Gamma)] \equiv [(A \vee B) \rightarrow \Gamma]$

Παράδειγμα:

(Εάν βρέχει το σχολείο θα λειτουργήσει και εάν χιονίζει το σχολείο θα λειτουργήσει) $\equiv$
(είτε βρέχει είτε χιονίζει το σχολείο θα λειτουργήσει)

Η γλώσσα δηλαδή χρησιμοποιεί τη δομή «είτε...είτε...» στην περίπτωση αυτή διατηρώντας κατά κάποιο τρόπο την ανάμνηση της βαθιάς δομής αφού το «είτε» είναι μια σύνθετη λέξη από το «ει» το οποίο παραπέμπει στη συνεπαγωγή αφού σημαίνει εάν, και το «τε» που είναι ο σύνδεσμος της σύζευξης στα αρχαία ελληνικά.

Αφήνουμε στον αναγνώστη την αναζήτηση των άλλων σημασιών του «ή» και του «είτε».

6.3.4 Η συνεπαγωγή: $(A \rightarrow B)$

Η Ελληνική γλώσσα είναι πολύ πλούσια σε εκφραστικά μέσα δηλωτικά της συνεπαγωγής, όπως:

- | | |
|---|---|
| 1) <i>Αν A τότε B</i> | 9) <i>Αφού A, άρα B</i> |
| 2) <i>Αν A, B</i> | 10) <i>Αφού A, έπεται B</i> |
| 3) <i>Αν A, και B</i> | 11) <i>A, οπότε B</i> |
| 4) <i>A συνεπάγεται B</i> | 12) <i>B συνάγεται από το A</i> |
| 5) <i>A συνεπώς B</i> | 13) <i>A είναι ικανή συνθήκη για B</i> |
| 6) <i>A επομένως B</i> | 14) <i>B είναι αναγκαία συνθήκη για A</i> |
| 7) <i>A, άρα B</i> | 15) <i>Πρέπει B, για A</i> |
| 8) <i>A, ώστε B</i> | 16) <i>Αρκεί A, για B</i> |

6.3.5 Η ισοδυναμία: $(A \leftrightarrow B)$

Η λογική ισοδυναμία, (ή διπλή συνεπαγωγή επειδή μπορεί να οριστεί από τη σύζευξη και τη συνεπαγωγή: $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$), διαθέτει εξίσου πλούσια εκφραστικά μέσα:

- 1) *A αν και μόνο αν B (ή A ανν B)*
- 2) *A εάν και μόνο εάν B*
- 3) *B εάν και μόνο εάν A*
- 4) *A ισοδυναμεί B (ή A ισοδυναμεί με B)*
- 5) *A είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για B*
- 6) *Για A πρέπει και αρκεί B*
- 7) *$(A \rightarrow B)$, και αντιστρόφως (όπου στη θέση της $(A \rightarrow B)$ μπορεί να είναι κάποιες από τις εκφράσεις της συνεπαγωγής)*

6.4 Η παρουσίαση μιας μαθηματικής έκφρασης

Σ' ένα μαθηματικό κείμενο ο συγγραφέας είναι υποχρεωμένος να θέσει ορισμένες συμφωνίες. Θα πρέπει να δηλώσει τα σύμβολα με τα οποία θα παραστήσει τα μαθηματικά αντικείμενα στα οποία θα αναφερθεί, τα αξιώματα της θεωρίας που θα αναπτύξει, αποτελέσματα άλλων εργασιών που θα χρησιμοποιήσει κτλ. Ακόμη στην αρχή της απόδειξης κάθε θεωρήματος θα πρέπει να δώσει μια σειρά πληροφορίες για τα γράμματα που στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσει. Την ενέργεια αυτή θα τη λέμε γενικά **παρουσίαση μιας μαθηματικής έκφρασης** (στον προγραμματισμό λέγεται declaration).

Αφού δύο είναι τα είδη των μαθηματικών εκφράσεων που διαθέτει ο μαθηματικός λόγος, μια παρουσίαση μπορεί να αφορά ένα όνομα ή μια απόφαση. Είναι φανερό ότι οι εκφράσεις που αποτελούν παρουσιάσεις βρίσκονται, από τη φύση τους, στο επιμαθηματικό επίπεδο, αν και συνήθως περιέχουν εκφράσεις που ανήκουν στο μαθηματικό επίπεδο.

6.4.1 Η παρουσίαση μιας απόφασης.

Στην παρουσίαση μιας απόφασης τίθεται ένα μαθηματικό γεγονός και απαιτείται από τον αναγνώστη να το δεχτεί ως αληθινό. Η έγκληση της παρουσίας ήταν κατά την κλασική αρχαιότητα προστακτική, και μάλιστα κατά κανόνα προστακτική Παρακειμένου.

- i) **Παρουσίαση αξιωμάτων:** Ιστορικό παράδειγμα, τα πέντε αξιώματα με τα οποία θεμελιώνει τη γεωμετρία του ο Ευκλείδης στα Στοιχεία. Παρουσιάζονται μέσω μιας προστακτικής παρακειμένου του αιτούμαι, απ' όπου πήραν και το όνομα *αιτήματα*.

Ἡπήσθω

ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.

Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ᾗ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

*Ας έχει απαιτηθεί,
από κάθε σημείο προς κάθε σημείο να είναι δυνατόν να άγεται μια ευθεία
Και κάθε ευθύγραμμο τμήμα να προεκτείνεται συνεχώς πάνω στην ίδια ευθεία
Και με κάθε σημείο ως κέντρο και κάθε απόσταση να γράφεται ένας κύκλος
Και όλες οι ορθές γωνίες να είναι ίσες μεταξύ τους
Και εάν δύο ευθείες, τεμνόμενες από άλλη ευθεία, σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά
γωνίες μικρότερες από δύο ορθές, προεκταθούν προς τα μέρη που σχηματίζουν τις
μικρότερες από δύο ορθές γωνίες, θα συμπέσουν.*

Στο σύγχρονο Μαθηματικό λόγο οι προτάσεις που αποτελούν αξιώματα δηλώνονται ως τέτοια χωρίς άλλα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά.

- ii) **Παρουσίαση συνθηκών ή περιορισμών.** Το γεγονός αυτό μπορεί να αφορά τις ανάγκες κάποιου σημείου μιας απόδειξης, μπορεί όμως να αφορά την ενότητα που αποτελεί μια απόδειξη.

Παράδειγμα:

- (1) Έστω $\alpha \leq 0$, $\beta > 0$. Τότε το συμπέρασμα ισχύει [ΛΕΓΑΤΟΣ, σελ. 393]

Εδώ οι αποφάνσεις $\alpha \leq 0$ και $\beta > 0$ περιορίζουν το πεδίο μεταβολής των μεταβλητών α και β .

- (2) Έστω ότι ο 117 είναι σύνθετος, τότε υπάρχει ο ελάχιστος πρώτος διαιρέτης του, έστω $p(>1)$ και ισχύει $P^2 \leq \sqrt{117}$. [ΛΕΓΑΤΟΣ, σελ. 329]

6.4.2 Η παρουσίαση μεταβλητών (ενός ονόματος).

Η παρουσίαση γραμμάτων μπορεί να είναι μια απλή απόδοση ονομάτων σε κάποια μαθηματικά αντικείμενα σταθερά ή μεταβλητά. Μπορεί όμως, όταν ανακοινώνονται σύμβολα μεταβλητών, η παρουσίαση να συνεκφράζεται με μια ποσόδειξη οπότε συνολικά αποτελεί μια δέσμευση, στο επιμαθηματικό επίπεδο.

Η απλή παρουσίαση

Η απλή παρουσίαση ενός γράμματος, ή γενικότερα ενός συμβόλου ή συναρμογής συμβόλων, είναι μια απλή απόδοση ονόματος σε κάποιο μαθηματικό αντικείμενο. Μια περιγραφή δηλαδή της σχέσης σημαίνοντος-σημαινόμενου. Αν πρόκειται για γράμμα, αυτό θα ποσοδειχθεί κατάλληλα όταν χρησιμοποιηθεί.

Παράδειγμα:

Ένα ελεύθερο διάνυσμα του οποίου δεν καθορίζεται ένας συγκεκριμένος αντιπρόσωπος, θα συμβολίζεται, ως στοιχείο του $\mathcal{E}$, με ένα μικρό γράμμα επιγραμμισμένο με βέλος $\vec{a}$. [Μαθηματικά Γ Λυκείου]

Ενδέχεται η απλή παρουσίαση ενός γράμματος να αποτελεί απόδοση ονόματος σε κάποιο συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο το οποίο εμφανίζεται στη διάρκεια μιας απόδειξης ή μιας κατασκευής.

Παράδειγμα:

(1) Έστω $\mathcal{M}$ η τομή των ευθειών $\mathcal{M}_1\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{M}_2\mathcal{P}_2$. [Αλγεβρα Β' Λυκείου σ.68]

(2) Για κάθε n -ψήφιο ακέραιο της Αριθμητικής, έστω a , αληθεύει ότι: $10^{n-1} \leq a \leq 10^n$ [ΛΕΓΑΤΟΣ, σελ.310]

Στο δεύτερο παράδειγμα η έκφραση $|\acute{\epsilon}\sigma\tau\omega\ a|$, τοποθετημένη από το συγγραφέα ανάμεσα σε δύο κόμματα, αποτελεί απλή απόδοση του ονόματος a στο μαθηματικό αντικείμενο το οποίο έχει αναφερθεί με το φυσικό του όνομα στην προηγούμενη φράση και έχει $\forall$ -ποσοδειχθεί. Ένα λειτουργικό σχήμα, δηλαδή ένα σχήμα που αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι του κειμένου, συνήθως αποτελεί σημαίνον κάποιου μαθηματικού αντικείμενου. Απ' αυτή τη σκοπιά αποτελεί ένα είδος ονόματος. Η παρουσίαση τέτοιων ονομάτων, που συνήθως συνοδεύεται και από μια δέσμευση, θα εξετασθεί σε επόμενη παράγραφο.

6.5 Δεσμευμένες και ελεύθερες μεταβλητές.

6.5.1 Δέσμευση των μεταβλητών στο μαθηματικό επίπεδο

- i) Όταν η απόφαση είναι τύπος μιας τυπικής μαθηματικής γλώσσας, τότε ισχύουν αυτά που αναφέραμε στο λογισμό των κατηγορημάτων.
- ii) Όταν η απόφαση δεν είναι συγκεκριμένος τύπος κάποιας συγκεκριμένης τυπικής μαθηματικής γλώσσας, τα προηγούμενα συντακτικά κριτήρια δεν είναι από τυπική σκοπιά εφαρμόσιμα.

Παραδείγματα:

$$(1) \text{ Υπάρχει γωνία } \omega \in (0, \pi/2) \text{ τοιαύτη ώστε } \frac{A-B}{2} = \omega \quad [\text{ΚΑΠΠΟΣ}]$$

$$(2) \text{ Για κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ υπάρχουν μοναδικοί } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ τέτοιοι ώστε } z = \alpha + \beta i$$

$$(3) \text{ Η } f \text{ έχει στο } x_0 \text{ όριο το } l \in \mathbb{R}, \text{ όταν για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } \delta > 0, \text{ τέτοιο ώστε} \\ \forall x \in \mathcal{A}, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \quad [\text{Μαθ I, γ' Λυκείου, 110}]$$

$$(4) \text{ Σε κάθε δακτύλιο } \mathcal{A}: \forall \alpha \in \mathcal{A}, \alpha 0 = 0\alpha = 0$$

$$(5) \text{ Εάν } \alpha \in \mathcal{N}, v \in \mathcal{N} \text{ τότε αληθεύει ότι } \sum_v \alpha = v\alpha \quad [\text{ΛΕΓΑΤΟΣ}]$$

Από σημασιολογική σκοπιά η έννοια της ελεύθερης και δεσμευμένης μεταβλητής διατηρούν το ίδιο με αυτό της τυπικής μαθηματικής γλώσσας περιεχόμενο. Μπορούμε να διακρίνουμε τα γράμματα που είναι ελεύθερες ή δεσμευμένες μεταβλητές ως εξής:

i) Έστω E μια μη τυπική Μ.Ε. που είναι απόφαση.

Τυποποιώντας την E με τη βοήθεια μιας κατάλληλης τυπικής μαθηματικής γλώσσας. (Ενδεχομένως να χρειάζεται να εισαχθούν κάποια σύμβολα κατηγορημάτων) τότε, ένα γράμμα x είναι ελεύθερη (δεσμευμένη) μεταβλητή στην E μόνο αν το x είναι ελεύθερη (δεσμευμένη) μεταβλητή στην τυποποιημένη E. Για παράδειγμα η:

$$\text{Υπάρχει γωνία } \omega \in (0, \pi/2) \text{ τοιαύτη ώστε } \frac{A-B}{2} = \omega$$

$$\text{τυποποιείται: } (\exists \omega) [\omega \in (0, \pi/2) \wedge \frac{A-B}{2} = \omega]$$

Είναι φανερό ότι το ω είναι δεσμευμένη μεταβλητή ενώ τα B, Γ ελεύθερες.

ii) Εφαρμόζοντας το **κριτήριο αντικατάστασης** ως εξής: Έστω E μια Μ.Ε. η οποία είναι διατυπωμένη με τη βοήθεια του συμβόλου x και ενδεχομένως κάποιων ακόμη συμβόλων εκτός από το x'. Έστω E' η Μ.Ε. που προκύπτει από την E όταν το x έχει αντικατασταθεί παντού από το x'. Το x είναι δεσμευμένη μεταβλητή στην E μόνο αν η E είναι συνώνυμη με την E. 1

Παράδειγμα:

$$E = (0 \text{ ελάχιστος } x \text{ τέτοιος ώστε } x^2 < 10x + 8, \text{ είναι ρητός})$$

$$E' = (0 \text{ ελάχιστος } t \text{ τέτοιος ώστε } t^2 < 10t + 8, \text{ είναι ρητός})$$

Είναι φανερό ότι οι δύο μαθηματικές εκφράσεις $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}'$ είναι συνώνυμες. Συγκεκριμένα είναι δύο διαφορετικά ονόματα του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου. Το κριτήριο αυτό ισχύει και για τους τύπους, οποιασδήποτε τυπικής Μαθηματικής Γλώσσας.

Τις συναρμογές συμβόλων, όπως $(\forall \dots)$, $(\exists \dots)$ ή τις εκφράσεις από τον καθομιλούμενο λόγο για $|για\ \acute{\alpha}\theta\eta\epsilon\ \dots|$, $|υπάρχει\ \dots\ \acute{\alpha}\tau\epsilon\iota\omicron\ \acute{\omega}\sigma\tau\epsilon|$ κ.τ.λ. οι οποίες δρώντας σαν τελεστές πάνω στις αποφάνσεις δεσμεύουν τις εμφανίσεις κάποιου γράμματος, τις ονομάζουμε δεσμευτές (mutificateurs) και τη λογικογλωσσολογική αυτή πράξη δέσμευση (mutification).

Σχόλιο:

Μια απόφαση εκφράζει ένα μαθηματικό γεγονός σταθερό ή μεταβλητό, πραγματοποιούμενο ή όχι. Σταθερό, σημαίνει ότι η απόφαση εκφράζει μια μαθηματική πρόταση, μεταβλητό ένα κατηγορημα με ελεύθερες μεταβλητές, ενώ πραγματοποιούμενο μια αληθινή πρόταση. Είναι φανερό ότι οι εκφράσεις που αποτελούν αποφάνσεις είναι φράσεις.

6.5.2 Οι δεσμεύσεις των μεταβλητών στο μαθηματικό επίπεδο.

Είναι φανερό ότι στα πλαίσια μιας τυπικής μαθηματικής γλώσσας η ποσόδειξη είναι το μοναδικό είδος δέσμευσης, πάνω σε αποφάνσεις, με τις δύο δυϊκές μορφές της, την υπαρξιακή ($\exists$ -ποσόδειξη) και καθολική ($\forall$ -ποσόδειξη). Σε ένα μαθηματικό κείμενο, βέβαια, εμφανίζονται και άλλες ποσοδείξεις. Για παράδειγμα οι πληθικοποιημένες ποσοδείξεις όπως η: $(\exists!x)$ που σημαίνει $|υπάρχει\ ακριβ\acute{\omega}\varsigma\ \acute{\epsilon}\nu\alpha\ x\ \acute{\alpha}\tau\epsilon\iota\omicron\ \acute{\omega}\sigma\tau\epsilon|$, η $(\exists^\infty x)$ που σημαίνει $|υπάρχουν\ \acute{\alpha}\pi\epsilon\iota\omicron\alpha\ x\ \acute{\alpha}\tau\epsilon\iota\omicron\ \acute{\omega}\sigma\tau\epsilon|$, και η $|για\ \acute{\omicron}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ x\ \epsilon\kappa\tau\acute{\omicron}\varsigma\ \acute{\alpha}\pi\acute{\omicron}\ \acute{\epsilon}\nu\alpha\ \pi\epsilon\pi\epsilon\omicron\alpha\varsigma\ \mu\epsilon\ \pi\lambda\acute{\eta}\theta\omicron\varsigma|$. κτλ. Οι ποσοδείκτες αυτοί δεν αποτελούν στοιχεία της τυπικής μαθηματικής γλώσσας αλλά εκφράζονται με τη βοήθεια των βασικών συμβόλων ποσοδεικτών $\forall$ και $\exists$.

$$(\exists!x)P(x) \equiv (\exists x)P(x) \wedge (\forall y)[P(y) \rightarrow x=y]$$

$$(\exists^\infty x)P(x) \equiv (\exists x)P(x) \wedge (\forall y)[P(y) \rightarrow (\exists z)P(z)]$$

Οι σχετικοποιημένες (ή φραγμένες) ποσοδείξεις ορίζονται ως εξής:

$$(\forall x \in A)P(x) \equiv (\forall x)[x \in A \rightarrow P(x)]$$

$$(\exists x \in A)P(x) \equiv (\exists x)[x \in A \wedge P(x)]$$

Οι εκφράσεις της καθομιλουμένης που χρησιμοποιούνται για τη διατύπωσή τους, όταν εμφανίζονται σε διδακτικά μαθηματικά κείμενα, και τα προβλήματα κατανόησης που τυχόν δημιουργούν αξίζει να μελετηθούν κατά περίπτωση μέσα στα ίδια τα κείμενα. Επίσης τα εκφραστικά μέσα που χρησιμοποιούνται για τη διατύπωση των δύο βασικών ποσοδείξεων μέσα στα πλαίσια της τυπικής μαθηματικής γλώσσας, είναι σαφή και συγκεκριμένα. Αντίθετα, τα προερχόμενα από την καθομιλουμένη εκφραστικά μέσα είναι ασαφή, με ακαθόριστα εκφραστικά όρια και ανοιχτά στους νεολογισμούς.

Από τη σκοπιά της ποσότητας της πληροφορίας που περιέχεται σε μια δοσμένη έκφραση, μια ποσόδειξη χαρακτηρίζεται σαν:

Εκφρασμένη , αν είναι ρητά διατυπωμένη μέσα στο κείμενο, δηλαδή αν παρέχει το μέγιστο της πληροφορίας που αφορά τη δέσμευση. 1

Ημiekφρασμένη (ή λίγο-πολύ εκφρασμένη) αν κάποια στοιχεία πληροφορίας δίνονται, χωρίς η ποσόδειξη να είναι ρητά διατυπωμένη. 1

Υπονοούμενη, όταν δεν παρέχεται καμιά πληροφορία από το κείμενο και η ύπαρξη της ποσόδειξης μαντεύεται από τα συμφραζόμενα. Παραδείγματα 1

(i) *Κάθε σύνθετος φυσικός αριθμός έχει έναν, τουλάχιστο, διαιρέτη, που είναι πρώτος.* [ΛΕΓΑΤΟΣ, σελ.328]

Στο παράδειγμα αυτό η έκφραση *|Κάθε σύνθετος φυσικός αριθμός|* αποτελεί μια *Εκφρασμένη Καθολική Ποσόδειξη* για τον φυσικό αριθμό, και μάλιστα σχετικοποιημένη (ή φραγμένη) στους σύνθετους φυσικούς αριθμούς. Η έκφραση *|έχει έναν, τουλάχιστο, διαιρέτη|* είναι μια *Ημiekφρασμένη-Υπαρξιακή-Ποσόδειξη* για την οποία κάποια πληροφορία παρέχεται στον αναγνώστη από το ρήμα *|έχει|*.

(ii) *Για κάθε φυσικό αριθμό α και κάθε φυσικό αριθμό β με $\beta > 1$ υπάρχει ακέραιος $v (v \geq 0)$ και ακέραιοι y_0, y_1, y_v με $0 \leq y_i \leq \beta - 1$ για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots, v$ και $y_v > 0$ τέτοιοι ώστε ο α να μπορεί να γραφεί κατά τον ακόλουθο τρόπο $y_0 + y_1\beta + y_2\beta^2 + \dots + y_v\beta^v$ και η παράσταση αυτή του α να είναι μονοσήμαντα ορισμένη.* [ΛΕΓΑΤΟΣ, σελ. 333]

Εδώ όλες οι ποσοδείξεις είναι εκφρασμένες.

(iii) *Εάν α είναι σύνθετος φυσικός αριθμός, τότε ο ελάχιστος, διάφορος από τον 1, διαιρέτης του είναι πρώτος.*

[ΛΕΓΑΤΟΣ,σελ.328]

Η $| \text{Εάν } \alpha \text{ είναι σύνθετος φυσικός αριθμός} |$ αποτελεί μια ημiekφρασμένη $\forall$ -ποσόδειξη για το α . Η έκφραση αυτή, και η σημασία της, έχουν κληρονομηθεί από τον αρχαίο ελληνικό μαθηματικό λόγο (βλ. §...). Στο κομμάτι $| \text{τότε ο ελάχιστος, διάφορος από τον 1, διαιρέτης του} |$ έχουμε μια υπονοούμενη $\exists$ -ποσόδειξη για τον διαιρέτη.

Είναι φανερό ότι όλες οι ποσοδείξεις σε μια τυπική μαθηματική γλώσσα είναι εκφρασμένες.

6.5.3 Οι δεσμεύσεις των μεταβλητών στο επιμαθηματικό επίπεδο

Η παρουσίαση-ποσόδειξη Μια παρουσίαση γραμμάτων μπορεί να συνεκφράζεται, όπως είπαμε, με μια ποσόδειξη για τα γράμματα αυτά. Η λογικογλωσσολογική αυτή πράξη, που συνολικά αποτελεί μια δέσμευση στο επιμαθηματικό επίπεδο, ονομάζεται παρουσίαση-ποσόδειξη.

Ανάλογα με το είδος της ποσόδειξης μια παρουσίαση-ποσόδειξη μπορεί να είναι:

Όταν η ποσόδειξη είναι καθολική, **παρουσίαση- $\forall$ -ποσόδειξη (Π- $\forall$ -Π)**, δηλαδή **έκθεση**.

Όταν η ποσόδειξη είναι Υπαρξιακή, **παρουσίαση- $\exists$ -ποσόδειξη (Π- $\exists$ -Π)**.

Παράδειγμα:

- (i) Εστω $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Τότε ο α είναι ισοϋπόλοιπος με τον β μόντουλο m [$\alpha = \beta \pmod{m}$], εάν και μόνο εάν είναι $\alpha - \beta = \text{πολ.} m$. [ΛΕΓΑΤΟΣ, σελ. 395]

Παρουσίαση- $\exists$ -ποσόδειξη (Π- $\exists$ -Π), όταν η ποσόδειξη είναι υπαρξιακή.

Παράδειγμα:

- (ii) Αν η εξίσωση $\alpha^x = \beta$, με $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \neq 1, 0$ και $\beta \in \mathbb{N}_0$, $\beta \neq 1, 0$ έχει κάποια λύση, έστω $\xi \in \mathbb{N}_0$ τότε είναι μοναδική και μάλιστα $\xi \geq 1$. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $\eta \in \mathbb{N}_0$ με $\eta \neq \xi$ και με $\alpha^\eta = \beta$. Επειδή είναι και $\alpha^\xi = \beta$, θα ισχύει: $\alpha^\xi = \alpha^\eta$. Από τους ξ , η κάποιος είναι ο μεγαλύτερος, έστω $\xi > \eta$. Τότε είναι:
 $(\alpha^\xi = \alpha^\eta) \Rightarrow (\alpha^\xi : \alpha^\eta = 1) \Rightarrow (\alpha^{\xi-\eta} = 1) \Rightarrow (\xi - \eta = 0) \Rightarrow (\xi = \eta)$, που είναι άτοπο. [ΛΕΓΑΤΟΣ,σελ.309]

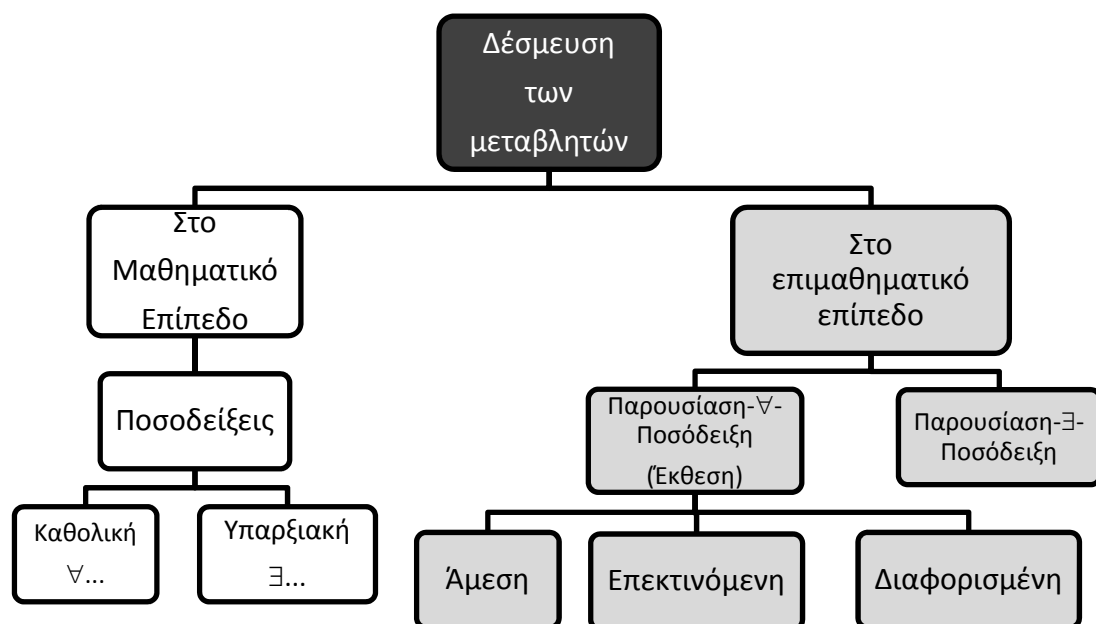
Η έκφραση έστω $\xi \in \mathbb{N}_0$ είναι μια απλή παρουσίαση. Πρόκειται για ελειπτική της $| \text{έστω } \xi, \xi \in \mathbb{N}_0 |$

Από την άποψη της λειτουργίας της, δηλαδή της **εμβέλειάς** της μέσα στο κείμενο, μια δέσμευση μεταβλητών μπορεί να είναι:

Άμεση: όταν εφαρμόζεται μόνο πάνω στην έκφραση που την ακολουθεί, όπως είναι η ποσόδειξη στην τυπική μαθηματική γλώσσα, αλλά και στην μεικτή. Άμεση δέσμευση είναι η υπογραμμισμένη έκφραση στο παράδειγμα (i)

Διαφορική: όταν εφαρμόζεται πάνω στην έκφραση που την ακολουθεί αλλά και στις επόμενες φράσεις της ενότητας, όπως γίνεται με την έκθεση.

Επεκτεινόμενη: όταν εφαρμόζεται και σε φράσεις που βρίσκονται σε άλλα μέρη στη συνέχεια του κειμένου, ενδεχόμενα σε ένα ολόκληρο κεφάλαιο.



6.6 Κριτήρια διάκρισης του μαθηματικού τα υπόλοιπα γλωσσολογικά επίπεδα

Στην αρχή του κεφαλαίου αυτού περιγράψαμε πότε μια έκφραση βρίσκεται στο επιμαθηματικό επίπεδο, χωρίς να δώσουμε τα κριτήρια που θα μας επιτρέπουν να διακρίνουμε το μαθηματικό από το επιμαθηματικό επίπεδο. Για συντάγματα που αποτελούν φράσεις, ο D.Lacombe δίνει τα κριτήρια που ακολουθούν:

Έστω Φ μια φράση. Εάν η Φ βρίσκεται αυστηρά στο μαθηματικό επίπεδο, τότε πρέπει να πληρούνται οι παρακάτω συνθήκες:

α) Από γραμματική άποψη η Φ είναι μια φράση αποφαντική (ή κρίσεως ή δηλωτική) και όχι ευκτική ή επιφωνηματική.

β) Εάν η Φ περιέχει κομμάτια λόγου που προέρχονται από την καθομιλουμένη, τα κομμάτια αυτά μπορούν να απαλειφθούν και να κατασκευαστεί μια φράση Φ' συνώνυμη της Φ γραμμένη με τη βοήθεια μιας κατάλληλης τυπικής γλώσσας. Είναι δηλαδή δυνατή η τυποποίηση της Φ .

γ) Εάν στη Φ εμφανίζονται γράμματα τότε για κάθε εμφάνιση θα πρέπει να μπορούμε να προσδιορίσουμε εάν είναι ελεύθερη ή δεσμευμένη.

δ) Εάν κάθε γράμμα με ελεύθερη εμφάνιση στη Φ αντικατασταθεί από μια σταθερά, τότε θα πρέπει να αποδίδεται χωρίς αμφιβολία στη Φ μια από τις αληθοτιμές: *αλήθεια, ψέμα*.

ε) Είναι δυνατόν να πάρουμε την άρνηση της Φ η οποία θα βρίσκεται επίσης στο μαθηματικό επίπεδο.

6.7 Οι Χαρακτηριστές μεταβολής

Αρκετά συχνά, μέσα σε μια έκφραση που αποτελεί ποσόδειξη ή παρουσίαση-ποσόδειξη, το όνομα του μαθηματικού αντικειμένου, είτε αυτό είναι λέξη είτε σύμβολο μεταβλητής, συνοδεύεται από κάποιον χαρακτηρισμό όπως τυχαίο, δοσμένο, οποιοδήποτε, κάποιο, κτλ. Θα ονομάζουμε τις λέξεις αυτές χαρακτηριστές.

Παραδείγματα:

(1) Αν δύο τυχοῦσες ευθείες τέμνονται υπό παραλλήλων ευθειών.

Γεωμετρία Γ' Λυκείου.

(2) Η εξίσωση: $\alpha^x = \beta$ στο σύνολο $\mathcal{N}_0$ ($\alpha \in \mathcal{N}$ και $\beta \in \mathcal{N}_0$, δεδομένοι) ...

[ΛΕΓΑΤΟΣ,σελ.309]

(3) υπάρχει κάποιος $v \in \mathcal{A}$, τέτοιος ώστε $v^+ \notin \mathcal{A}$

[ΛΕΓΑΤΟΣ,σελ.282]

(4) Έστω ότι για κάποιον $k \in \mathcal{N}$, $k \geq 2$, αληθεύει η πρόταση

$$p(k): \alpha^k - \beta^k = (\alpha - \beta)(\alpha^{k-1} + \dots + \beta^{k-1})$$

Θα δείξουμε ότι, τότε, θα αληθεύει και η πρόταση

$$p(k+1): \alpha^{k+1} - \beta^{k+1} = (\alpha - \beta)(\alpha^k + \dots + \beta^k)$$

[ΛΕΓΑΤΟΣ,σελ.311]

Ο ρόλος των λέξεων αυτών στο νεοελληνικό μαθηματικό λόγο είναι επικουρικός στα εκφραστικά μέσα των ποσοδείξεων και των παρουσιάσεων-ποσοδείξεων. Συνήθως ο ρόλος ενός χαρακτηριστή είναι να τονίσει την ύπαρξη μιας ποσόδειξης. Όμως, ο ίδιος χαρακτηριστής είναι δυνατόν να εμφανίζεται για να τονίσει άλλοτε μια καθολική, άλλοτε μια υπαρξιακή ποσόδειξη, όπως στα παραδείγματα 4 και 3 ο χαρακτηριστής κάποιος . Από τη φύση τους οι χαρακτηριστές βρίσκονται στο επιμαθηματικό επίπεδο. Στα πλαίσια του μαθήματος αυτού αρκούμεθα στη διαπίστωση της ύπαρξης χαρακτηριστών στο νεοελληνικό μαθηματικό λόγο. Το σύνολο των μορφών με τις οποίες εμφανίζονται οι χαρακτηριστές στο νεοελληνικό μαθηματικό λόγο και τα προβλήματα κατανόησης που δημιουργούν μπορεί να αποτελέσει θέμα μιας διατριβής.

7. Λόγος και σκέψη

(Το πρόβλημα της μηχανικής απομνημόνευσης ή παπαγαλίας)

Ας έλθουμε τώρα στο ζήτημα της σκέψης και της γνωστικής λειτουργίας. Δυστυχώς δεν διαθέτουμε *αναλυτικό ορισμό* για τη σκέψη, ανάλογο με αυτόν της γλώσσας, για μια αυτοτελή διερεύνηση του φαινομένου. Ταυτόχρονα η σκέψη συναρτάται άμεσα με τη γνώση και τη μάθηση. Η εκδήλωση δε της παπαγαλίας ως εκφοράς λόγου, μας οδηγεί στο να διερευνήσουμε το φαινόμενο κάτω από το πρίσμα της σχέσης του λόγου με τη σκέψη.

Με δεδομένους τους ορισμούς της γλώσσας και του λόγου, ως οποιασδήποτε μορφής πραγμάτωση της γλώσσας, είναι αναμφισβήτητο ότι *αν κάποιος χρησιμοποιεί γλώσσα, τότε σκέφτεται*. Εξάλλου το προφανές της αντιθετοαντίστροφης διατύπωσης που είναι λογικά ισοδύναμη, ότι δηλαδή *αν κάποιος δε σκέφτεται τότε δε χρησιμοποιεί γλώσσα*, δεν αφήνει κανένα περιθώριο αμφισβήτησης. Ο αντίστροφος όμως ισχυρισμός, ότι *αν κάποιος σκέφτεται τότε χρησιμοποιεί μια ορισμένη γλώσσα*, όχι μόνο δεν είναι προφανής αλλά αποτελεί αντικείμενο ιδεολογικής διαμάχης. Η αποδοχή του ισχυρισμού αυτού αποκαθιστά μια λογική ισοδυναμία μεταξύ του ενεργήματος της σκέψης και του ενεργήματος της χρήσης μιας γλώσσας· ισοδυναμία η οποία καθόλου δε σημαίνει ταύτιση των δύο ενεργημάτων αλλά απλά ότι είναι αδύνατη η σκέψη χωρίς χρήση μιας γλώσσας και η χρήση μιας γλώσσας χωρίς σκέψη. Εξάλλου, αν οι δύο διεργασίες ταυτίζονταν δεν θα υπήρχε μεταξύ τους σχέση για να διερευνηθεί. Η ουσία της διαμάχης συνίσταται στο «*εάν η ανθρώπινη σκέψη αποτελείται από δύο ξεχωριστές διεργασίες, μια καθαρή σκέψη που προηγείται σχετικά, και μια δευτερογενή λεκτικοποίηση των σκέψεων αυτών, ή από μια και μόνη διεργασία σκέψης σε μια γλώσσα*»¹

Αδιαμφισβήτητα επιστημονικά δεδομένα, παρατηρεί ο Schaff,² μας πείθουν ότι η σκέψη είναι πάντοτε σκέψη σε κάποια γλώσσα. Είναι γνωστό ότι στα παιδιά που γεννιούνται κουφά, ή κωφάλαλα, όπως επίσης κωφάλαλα και τυφλά -και ακόμη πιο χαρακτηριστική είναι η περίπτωση παιδιών που δεν μεγάλωσαν σε ανθρώπινο περιβάλλον, δηλαδή περιβάλλον λόγου- η σκέψη τους δεν υπερβαίνει τον προσανατολισμό στο χώρο· ότι δεν μπορούν δηλαδή να σκέφτονται και να συμπεριφέρονται στον κοινωνικό τους περίγυρο με τρόπο που να καθορίζεται από τη σκέψη τους, αν δεν μάθουν να χρησιμοποιούν μια γλώσσα και μάλιστα την κατάλληλη περίοδο της ζωής τους. Είναι πολύ χαρακτηριστική η φύση των αλλαγών προσανατολισμού στον κόσμο που επιφέρει η διδασκαλία μιας γλώσσας και η συνακόλουθη εμφάνιση της λειτουργίας του λόγου, σε ένα άτομο που δεν έμαθε να μιλάει στη συνηθισμένη ηλικία, όπως π.χ. ο Caspar Hauser: «*Στην αρχή αντιλαμβάνονταν τον κόσμο ως συλλογή από χρωματιστές κηλίδες, και τον αντιλήφθηκε τελικά ως κόσμο των πραγμάτων μόνο όταν έμαθε*

¹ Adam Schaff, *Γλώσσα και Γνώση*, Αθήνα, Ι. Ζαχαρόπουλος, σ.133

² Ο.π. σ. 135

τα ονόματα των πραγμάτων αυτών»³. Επίσης οι ψυχολογικές μελέτες που έγιναν σε παιδιά που γεννήθηκαν κωφάλαλα και τυφλά, όπως η Laura Bridgman, έδειξαν ότι η δυνατότητα για αφηρημένη σκέψη γίνεται πραγματικότητα μόνο όταν μάθουν να μιλάνε με τη βοήθεια της αφής (απτικός λόγος): όταν δηλαδή τους μεταδοθεί ένα σύστημα σημείων το οποίο να αποτελεί μεταφορά μιας φθογγικής γλώσσας σε απτική. «Η δασκάλα μου έβαλε το χέρι μου κάτω από τη βρύση. Καθώς το κρύο νερό αναπηδούσε πάνω στο ένα χέρι, η δασκάλα συλλάβισε στο άλλο χέρι τη λέξη νερό... Έμαθα τότε ότι “νε-ρό” σήμαινε το θαυμάσιο κρύο πράγμα που έτρεχε πάνω στο χέρι μου»⁴. Έτσι περιέγραψε στο βιβλίο της *The story of my Life*, γραμμένο στην απτική γλώσσα Μπράιγ των τυφλών, όταν ήταν πλέον φοιτήτρια, την εμπειρία της, η κωφάλαλη και τυφλή Hellen Keller, όταν επτάχρονη άρχισε να μαθαίνει γλώσσα αξιοποιώντας την αφή. Δύσκολα, σχολιάζει ο Schaff, θα εύρισκε κανείς ισχυρότερο και εναργέστερο επιχείρημα που να επιβεβαιώνει την ενότητα σκέψης και λόγου και να ανασκευάζει τις μεταφυσικές θεωρίες για «καθαρή» σκέψη, από τη διαπίστωση ότι «αν ένα παιδί που είναι ανάπηρο και δεν μπορεί να μιλήσει δεν διδαχθεί ένα σύστημα σημείων – αν, δηλαδή, δεν του μεταδοθεί ένα σύστημα σημείων – είναι καταδικασμένο σε διαρκή πνευματική αναπηρία. Το λογικό συμπέρασμα είναι ότι δεν υπάρχει σκέψη χωρίς ένα σύστημα σημείων, όχι κατ’ ανάγκη φθογγικών. Ακόμη οι διαπιστώσεις αυτές επιβεβαιώνουν την άποψη ότι η σκέψη είναι κοινωνικό προϊόν αν και είναι πάντα ατομικό ενέργημα»⁵.

Τέλος, για το γεγονός ότι ο εγκέφαλος αποτελεί την υλική βάση της γλώσσας η σύγχρονη νευροεπιστήμη δεν αφήνει καμία αμφιβολία: της αρκεί να θεωρεί τη γλώσσα ως εκφορά και κατανόηση του λόγου και τη σκέψη ως σύνθετη γνωστική λειτουργία. Σήμερα είναι αρκετά γνωστές πολλές από τις νευροβιολογικές διαδικασίες που πραγματοποιούνται ως γλωσσικές διεργασίες κατά τη γνωστική διαδικασία. Οι δυνατότητες αυτές του εγκεφάλου είναι κοινωνικά καθορισμένες, με την έννοια ότι σε ένα εξωκοινωνικό άτομο, αν και υπάρχουν, δεν θα γίνουν ποτέ πραγματικότητες αφού δεν θα μάθει γλώσσα. Πρόκειται λοιπόν για ένα δώρο της κοινωνίας στο άτομο, καθώς και το εγγραφόμενο με τρόπο εντελώς υλικό στη μνήμη, το ιδεατό⁶, αποτελεί κοινωνικό προϊόν.

7.1 Τα δεδομένα της σύγχρονης νευροεπιστήμης

Το ερώτημα όμως που μας απασχολεί εδώ είναι πώς είναι δυνατόν κάποιος να μιλάει (ή να γράφει) χωρίς να σκέφτεται, και τι σημαίνει αυτό για τη νόηση του υποκειμένου. Με

³ Ο.π. σ. 143

⁴ Eric R. Kandel, Jamew H. Schwartz, Thomaw M. Jessell, *Νευροεπιστήμη και συμπεριφορά*, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2006, σ. 386

⁵ Adam Schaff σ.144

⁶ Βλέπε: E. B. Ilienkov, *Διαλεκτική Λογική*, Αθήνα Gutenberg, 1983, σ.191, και E. Μπιτσάκης, *Δρόμοι της διαλεκτικής*, Αθήνα, Άργα, 2003, σ.130

την αποδοχή της ενότητας λόγου και σκέψης η παπαγαλία, ως λόγος χωρίς σκέψη, φαίνεται αδύνατη. Μήπως όμως η συμπεριφορά αυτή προσιδιάζει σε κάποιο στιγμιότυπο της εξελικτικής πορείας της ενότητας αυτής κατά την ανάπτυξη του κοινωνικού ατόμου; Μήπως η ικανότητα απομνημόνευσης ήχων είναι σε κάποια φάση της παιδικής νόησης αναγκαία και θετική, ενώ για το εξελιγμένο γλωσσο-νοητικά άτομο η επιστροφή σ' αυτήν είναι όχι μόνο άχρηστη αλλά και καταστρεπτική;

Μεθοδολογικά το πρόβλημα της σχέσης του λόγου με τη σκέψη πρέπει να το εξετάσουμε στην ιστορικότητά του, στη διαδικασία της εξέλιξής του και στη συνάφειά του με την εξέλιξη της γλώσσας, καθότι η χρήση μιας γλώσσας προϋποθέτει, όπως ήδη αναφέραμε, σκέψη, αφού προϋποθέτει κατανόηση νοήματος το οποίο συναρτάται με τους υλικούς φορείς της δεδομένης γλώσσας. Η συστηματική θεώρηση της εξελικτικής αυτής πορείας του φαινομένου της σκέψης οφείλεται στις έρευνες του Βυγκότσκι (1920 έως το 1935). Ο Βυγκότσκι θεώρησε ότι εμφανίζεται στις φάσεις της φυλογένεσης και της οντογένεσης ως *προσανατολισμός στο χώρο*, χαρακτηρίζοντας, με διαβάθμιση, όλο το ζωικό βασίλειο, για να εξελιχθεί στον κοινωνικό άνθρωπο σε *προσανατολισμός στο κόσμο*. Μπορούμε γενικότερα να πούμε πως ο προσανατολισμός στο χώρο εμφανίζεται με πρωτόλεια μορφή σε κάθε μορφή έμβιας ύλης, ως χημειοτακτισμός στις απλούστερες μορφές και ως ηλιотροπισμός και φωτοτροπισμός στα φυτά.

Ωστόσο το παιδί δεν γεννιέται με κατακτημένο αυτόν τον προσανατολισμό στον κόσμο. Γεννιέται με τη δυνατότητα να τον κατακτήσει, δυνατότητα της οποίας του όρους και τις προϋποθέσεις για να γίνει πραγματικότητα, θα πρέπει μια πολιτισμένη κοινωνία να παρέχει απλόχερα.

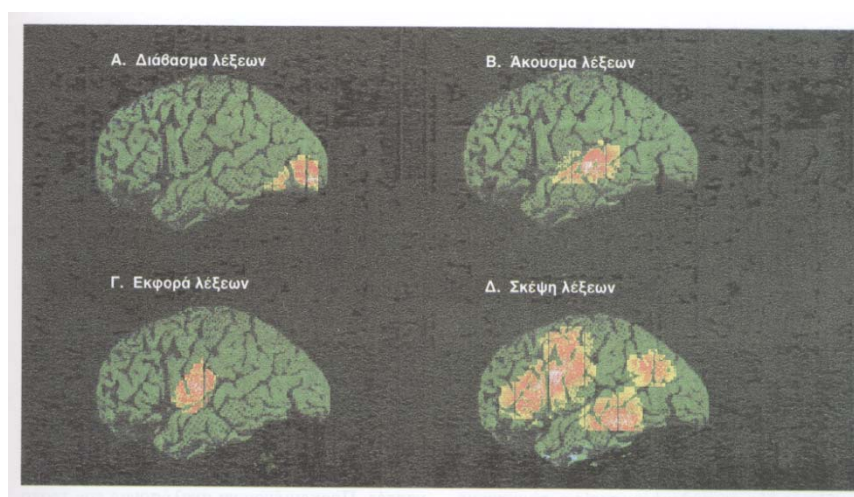
Γύρω από το πρόβλημα της σχέσης του λόγου με τη σκέψη, ο Βυγκότσκι διαπίστωσε ότι η ανάπτυξη της σκέψης εμφανίζεται πριν από την ανάπτυξη του λόγου και στη φυλογένεση και στην οντογένεση του ανθρώπου. Διαπίστωσε δηλαδή ένα *προ-γλωσσικό* στάδιο στην ανάπτυξη της σκέψης, καθώς και ένα *προεννοιακό* στην ανάπτυξη του λόγου· η μεν σκέψη ως προσανατολισμός στο χώρο, ο δε λόγος ως απλή εκφορά ήχων χωρίς σημασιόμενα· ικανότητα που κατακτιέται μέσα από τη συνεχή μίμηση. Το παιδί αναπτύσσει την προσωπικότητά του σ' ένα ανθρώπινο περιβάλλον. Το περιβάλλον αυτό κατακλύζεται από ήχους, ακολουθίες φωνημάτων, που δεν είναι παρά η γλωσσικά αρθρωμένη σκέψη των μεγάλων. Η διαπίστωση, μέσα από τις αλληπάλληλες επαναλήψεις, της αντιστοιχίας ορισμένων ήχων με ορισμένα πράγματα αποτελεί την απαρχή της εγκαθίδρυσης της λέξης στη σκέψη του παιδιού. Τα πράγματα έχουν ονόματα. Πρόκειται για μια από τις πιο συγκλονιστικές ανακαλύψεις του παιδιού, στην ηλικία των δύο περίπου χρόνων.

Η λέξη θα παρεμβληθεί μεταξύ του αντικειμένου και της νοητικής του αναπαράστασης δημιουργώντας σταδιακά το δεύτερο σύστημα σήμανσης. Πρόκειται για μια τεράστια γενίκευση. Είναι η στιγμή που οι ανεξάρτητες μέχρι τότε γραμμές ανάπτυξης του λόγου και της σκέψης αρχίζουν να συναντώνται και να εξελίσσονται μαζί, δημιουργώντας μian εντελώς νέα μορφή συμπεριφοράς, χαρακτηριστική για το κοινωνικό ανθρώπινο άτομο. Η συνάντηση δεν σημαίνει ταύτιση, αλλά συγκρότηση ενός ενιαίου όλου με δύο όψεις όπως

οι δύο όψεις ενός χαρτιού, που αν επιχειρήσει κανείς να τους χωρίσει απλώς θα καταστρέψει το χαρτί. Με άλλα λόγια η σκέψη επιτελείται πλέον με τη λέξη, ή η ανθρώπινη σκέψη είναι πάντοτε σκέψη σε κάποια γλώσσα την οποία το κοινωνικό άτομο έμαθε στην κατάλληλη ηλικία.

Το παιδί λοιπόν αρχίζει να σκέπτεται με λέξεις. Η λέξη όμως σ' αυτήν τη φάση διαθέτει μόνο ακουστική εικόνα, και μη μπορώντας να ανακληθεί στη σκέψη παρά μόνο μέσω αυτού του υλικού φορέα, εκφωνείται. Έτσι το παιδί μιλάει τη σκέψη του. Πρόκειται γι' αυτό που ο Πιαζέ είχε ονομάσει εγωκεντρική γλώσσα των παιδιών, διαπιστώνοντας ότι χάνεται γύρω στα 7 χρόνια, ηλικία κατά την οποία εμφανίζεται ο εσωτερικός διαλογισμός, χωρίς ωστόσο να διαπιστώνει σχέση μεταξύ των δύο φαινομένων.

Η διαπίστωση, ότι το παιδί μιλάει τη σκέψη του, οφείλεται στον Βυγκότσκι και άνοιξε το δρόμο για τη ερμηνεία του εσωτερικού λόγου που δεν είναι τίποτα περισσότερο από τη γλωσσικά αρθρωμένη σκέψη του παιδιού, η οποία γύρω στην ηλικία των 7 χρόνων αρχίζει σιγά- σιγά να μην εκφωνείται αλλά να πραγματώνεται ως εσωτερικός λόγος. Η λεγόμενη «εγωκεντρική γλώσσα» αποτελεί ένα μεταβατικό στάδιο από τον εξωτερικό στον εσωτερικό λόγο.⁷



Οι περιοχές του φλοιού του αριστερού ημισφαιρίου του εγκεφάλου του ώριμου ενήλικα που συμμετέχουν στην ανάγνωση το άκουσμα, την εκφορά και τη σκέψη λέξεων⁸

Όταν ακούμε μια λέξη ενεργοποιείται ο ακουστικός φλοιός και η περιοχή Wernicke (περιοχή Β). Όταν διαβάζουμε μια λέξη η οπτική πληροφορία από τον ινιακό φλοιό (περιοχή Α) φαίνεται ότι μεταφέρεται απευθείας στην περιοχή Broca (περιοχή Γ) όταν δεν υπάρχει επεξεργασία (απόδοση νοήματος), ενώ όταν νοηματοδοτείται περνάει από την περιοχή Wernicke, χωρίς να μετατρέπεται προηγουμένως, στον οπίσθιο κροταφικό φλοιό, σε

⁷ Λεβ Βυγκότσκι, Σκέψη και γλώσσα, Αθήνα, Γνώση, 1993, σ. 54

⁸ Νευροεπιστήμη και Συμπεριφορά, σ. 19

ακουστική αντιπροσώπευση⁹. Η περιοχή είναι υπεύθυνη για τη νοηματοδότηση της λέξης. Οι δύο διαφορετικοί δρόμοι συγκλίνουν στη περιοχή Broca. Φαίνεται λοιπόν ότι η περιοχή Wernicke (περιοχή Β) και η περιοχή Broca (περιοχή Γ) «εκπαιδεύονται» με φυσικό τρόπο κατά την ανάπτυξη, με τη κατάκτηση της φυσικής γλώσσας, ενώ η γλωσσική επεξεργασία του οπτικού ερεθίσματος που φτάνει στην περιοχή Α, είναι προϊόν της σχολικής εκπαίδευσης.

Ας εξετάσουμε τώρα την εξελικτική πορεία του παιδιού όπως την περιγράφει ο Βυγκότσκι, κάτω από το φως των δεδομένων αυτών:

1) Κατά το προνοητικό στάδιο εξέλιξης του λόγου το παιδί μαθαίνει να μιμείται τις ακουστικές εικόνες των λέξεων που δέχεται. Προφέρει – ακούει το αποτέλεσμα και διορθώνει. Μέσα από μία ατελείωτη διαδικασία δοκιμής-λάθους κατακτά την ικανότητα να επαναλαμβάνει ορθά τις ακουστικές εικόνες που δέχεται. Στη φάση αυτή αποθηκεύει τις ακουστικές εικόνες, και προπονείται στην ορθή επανάληψή τους. Δεν είναι λοιπόν τυχαίο ότι το παιδί θα αντιδράσει στο άκουσμα της λαθεμένης εκφοράς μιας λέξης της οποίας την ακουστική εικόνα έχει ορθά καταγράψει. Ο τρόπος συμμετοχής σ' αυτήν την ηλικία των περιχών Β και Γ δεν έχει αποτυπωθεί.

2) Μόλις οι λέξεις αποκτήσουν σημασιόμενα (είναι χαρακτηριστικό ότι τα σημασιόμενα σ' αυτή τη φάση είναι εμπράγματα, τάση την οποία, όπως διαπίστωσε ο Βυγκότσκι το παιδί θα υπερβεί μόνο μέσω της παιδείας), αρχίζει η διαδικασία της σκέψης οπότε ενεργοποιούνται εκτός από τις περιοχές Β και Γ και οι περιοχές Δ. Η σκέψη αρχίζει να γίνεται γλωσσική. Πρόκειται για την αποκατάσταση της ενότητας λόγου και σκέψης. Κατά την περίοδο αυτή (από 2 μέχρι 7 περίπου χρόνια) η σκέψη αυτή είναι φωναχτή για να εξελιχθεί σταδιακά σε εσωτερικό λόγο.

3) Σ' αυτήν περίπου τη φάση, στη ηλικία των 7 χρόνων, ανοίγεται μια νέα δυνατότητα για τα παιδιά που μπαίνουν σε σχολικό περιβάλλον, αυτή της ανάγνωσης. Ο οπτικός φλοιός θα «εκπαιδευτεί» ως νέα είσοδος προς την περιοχή Broca και σταδιακά προς τη Δ. Έτσι δεν είναι τυχαίο ότι τα παιδιά στην αρχή της εκπαίδευσής τους στην ανάγνωση διαβάζουν μεγαλόφωνα αφού η νόησή τους νοηματοδοτείται μέσω λέξεων μόνο από την ακουστική οδό, περιοχή Β (Wernicke). Η ανάγνωση από φωναχτή θα γίνει ψίθυρος και μόνο όταν χαθεί τελείως, δηλαδή η περιοχή Β συμμετέχει μόνο για τη νοηματοδότηση, το παιδί έχει κατακτήσει πλήρως την ανάγνωση· όταν με άλλα λόγια η οπτική εικόνα των λέξεων συναντηθεί κατευθείαν με τον εσωτερικό λόγο. Η εξέλιξη της αναγνωστικής ικανότητας, ακολουθεί όμοιο δρόμο εξέλιξης, στη σχέση του με τη σκέψη, με αυτόν του εγωκεντρικού λόγου, ο οποίος στο ερμηνευτικό πλαίσιο του Βυγκότσκι δεν είναι παρά η γλωσσικά αρθρωμένη σκέψη του παιδιού που αρχικά εκφωνείται για να γίνει στην πορεία εσωτερικός λόγος. Διαβάζω και κατανοώ το νόημα λοιπόν σημαίνει συμμετοχή των εγκεφαλικών περιοχών Α, Δ.

⁹ Ο.π σ. 17

4) Τι γίνεται όμως με τους τυφλούς όταν μάθουν την απτική γλώσσα Μπράιγ; Το ρόλο της περιοχής Α αναλαμβάνει η υποδεκτική των δακτύλων περιοχή του εγκεφαλικού φλοιού. Αυτή θα διασυνδεθεί με την περιοχή Broca. Η πλαστικότητα του εγκεφάλου στις διαδικασίες μάθησης και η δυνατότητά του να δημιουργεί νέες συνάψεις είναι γεγονότα διαπιστωμένα από τη σύγχρονη νευροεπιστήμη¹⁰. Όλες οι περιοχές του εγκεφάλου που εμπλέκονται στις γλωσσικές και γνωστικές διαδικασίες βρίσκονται στο φλοιό του αριστερού¹¹ ημισφαιρίου. Ο φλοιός αποτελεί το πιο πρόσφατο στρώμα. Είναι, γράφει ο Ε. Μπιτσάκης, η «έδρα της νόησης, προϊόν της καθαυτό ανθρώπινης εξέλιξης του είδους χάρη στην εργασία και συνολικά την κοινωνική ζωή....Ο φλοιός είναι προϊόν και προϋπόθεση της ανθρωπογένεσης¹²»

7.2 Το παιδί ως μαθητής

Πως όμως πρέπει να κατανοήσουμε την παιδική προσωπικότητα ως υποκείμενο μάθησης;

Το παιδί, παρατηρεί ο Βυγκότσκι, δεν μπορεί να κατανοηθεί ως μικρογραφία του ενήλικου, ούτε η διάνοιά του είναι σμίκρυνση της διάνοιας του ενήλικου¹³. Το δρόμο της εξέλιξής του μπορούμε να τον κατανοήσουμε μόνο αν τον σκεφτούμε στους κοινωνικούς του όρους. Και ο δρόμος της εξέλιξης αυτής, *δεν είναι αυτός της σταδιακής κοινωνικοποίησης που μεταβιβάζεται στο παιδί απ' έξω*, αλλά η σταδιακή εξατομίκευση που γεννιέται στη βάση της κοινωνικής του υπόστασης. Το παιδί θα πάρει (θα μάθει) από την κοινωνία των μεγάλων, ό,τι εξατομικεύσει ως οργανικό μεν μέλος της, (στην αλληλεπίδρασή του μαζί της) διατηρώντας ακέραια όλα τα στοιχεία της αυτοτέλειάς του. Θα μπορέσει δηλαδή να οικειοποιηθεί ελεύθερα από τη διανοητική κουλτούρα της εποχής του αυτό που προσιδιάζει στην ιδιοσυγκρασία του και όπως η ιδιοσυγκρασία του διαμορφώνει αυτή τη πρόσληψη. Αυτό βεβαίως καθόλου δε σημαίνει ότι θα πρέπει να ανακαλύψει ξανά τον τροχό, (όπως απαιτεί ο ακραίος κονστρουκτιβισμός)· ο τροχός είναι μέρος της διανοητικής κουλτούρας της εποχής του.

¹⁰ Ο.π., σ. 339-386.

¹¹ Ο.π. σ. 675

¹² Ε. Μπιτσάκης, *Δρόμοι της διαλεκτικής*, Αθήνα, Άργα, 2003, σ.109

¹³ Λεβ Βιγκότσκι, σ.28

7.3 Η μηχανική απομνημόνευση ή παπαγαλία

Τι είναι λοιπόν η παπαγαλία; Τίποτα περισσότερο από την αναπαραγωγή, γραπτά ή προφορικά, της ακουστικής εικόνας του λόγου χωρίς τα σημαινόμενα, με απουσία, δηλαδή, κάθε γνωστικής διαδικασίας. Ο λόγος του παπαγάλου αποτελεί φυσικά πραγμάτωση της γλώσσας, η πραγμάτωση όμως αυτή έχει υλοποιηθεί σε άλλο εγκέφαλο. Ο παπαγάλος λοιπόν δεν σκέφτεται.

Η αναπαραγωγή ωστόσο της ακουστικής εικόνας του λόγου είναι μια χρήσιμη και αναγκαία ικανότητα για το βρέφος των δύο περίπου χρόνων. Δηλαδή ο έφηβος πειθαναγκάζεται να επιστρέψει στη βρεφική ηλικία της προ-νοητικής χρήσης του λόγου. Σπάει δηλαδή την κατακτημένη από το κοινωνικό άτομο ενότητα λόγου και σκέψης. Αυτός είναι και ο λόγος που διαβάζει μεγάλωφωνα: Εκφωνεί για να αποτυπώσει το άκουσμα και όχι το νόημα. Πρόκειται για χειρισμό των υλικών φορέων του νοήματος χωρίς το νόημα. Αποτυπώνει τις ακουστικές εικόνες των λέξεων, όπως έκανε στην ηλικία των δύο περίπου χρόνων. Βεβαίως το «να επιστρέψει» δεν είναι απόλυτο με την έννοια ότι αν η «εκπαίδευση» στη παπαγαλία αρχίσει από την πρώτη δημοτικού, τότε η ικανότητα για καταγραφή της ακουστικής εικόνας του λόγου είναι ακόμη αρκετά ζωντανή. Το παιδί θα καταφύγει σε μια τέτοια διαδικασία μόνο για να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις του εκπαιδευτικού συστήματος, ή των γονιών του, όταν, αυτό που του ζητείται να μάθει του είναι ακατανόητο, ξένο και άχρηστο με τα κριτήριά του, δεν έχει καμιά ανταπόκριση και κανένα ισοδύναμο στην άμεση ζωτική και κοινωνική εμπειρία του, δεν πηγάει με κανένα τρόπο απ' αυτήν. Πρόκειται για μια εντελώς αφύσικη, δηλαδή απάνθρωπη διαδικασία. Το παιδί στην αρχή αντιστέκεται, δυστροπεί, πετάει τα βιβλία, κλαίει, προσπαθεί να διώξει πίσω τη τροφή που δε μάσησε το ίδιο, αλλά συνήθως χάνει μέσα από την επανάληψη, υποκύπτει με τη χρησιμοποίηση ποικίλων μέσων. Στο τέλος ο αντικειμενικός σκοπός του «παιδαγωγού» επιτυγχάνεται αλλά με τίμημα την απώλεια της ικανότητας να σκέφτεται, εκτός κι αν ο διδασκόμενος δεν παίρνει και πολύ στα σοβαρά την ακατανόητη και άχρηστη «γνώση» που είναι υποχρεωμένος να απομνημονεύσει. Είναι, τότε, αδύνατον να ακρωτηριαστεί για πάντα, και η ζωή που τον περιβάλλει τον σώζει αφού είναι πάντα πιο έξυπνη από το (σκόπιμα;) κουτό εκπαιδευτικό σύστημα. Πολλοί έφηβοι, που έχουν διασώσει τη σκέψη τους αλώβητη, για να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις των εισαγωγικών στα πανεπιστήμια εξετάσεων, καταφεύγουν σε μια διπλή προσπάθεια· μελετούν για να κατακτήσουν το περιεχόμενο και σε μια επόμενη φάση αποστηθίζουν τα απαιτούμενα κείμενα!

Το σύνολο λοιπόν των «πληροφοριών», που με μηχανικό τρόπο έχει καταγραφεί στον εγκέφαλο, είναι ένα σύνολο άχρηστων για το φυσιολογικό άτομο «πληροφοριών» τις οποίες ο εγκέφαλος εξαναγκάζεται με τρόπο βίαιο, μέσω της επανάληψης, να συγκρατήσει τουλάχιστον μέχρι τις εξετάσεις. Μια τέτοια βέβαια επανάληψη δεν είναι «η μήτηρ της μαθήσεως» αλλά η κακή μητριά της. Ένας φυσιολογικός εγκέφαλος έχει την τάση να στείλει, μέσω της λήθης αυτές τις ακολουθίες, από ακουστικές εικόνες λέξεων, στα σκοτεινά υπόγεια του υποσυνείδητου, όσο πιο γρήγορα γίνεται. Να λοιπόν πως ο αυτοσαρκασμός του delete

έχει αντικειμενική βάση. Πρόκειται, όπως εύστοχα σχολιάζει ο Ε. Ιλένκοφ¹⁴, για τον απόλυτα φυσιολογικό μηχανισμό της λήθης που προστατεύει τον εγκέφαλο από μια χαοτική μάζα ασύνδετων με νοήματα καταγραφών, ώστε να επιτρέψει στη συνείδηση να παραμείνει ελεύθερη και διαθέσιμη για τις ανώτερες μορφές ανθρώπινης δραστηριότητας.

Αυτοί είναι οι λόγοι για τους οποίους η παπαγαλία είναι εχθρός της μάθησης, γι' αυτό κατακρεουργεί τη σκέψη και τη δημιουργική φαντασία των παιδιών.

7.4 Οι παράγοντες που ευνοούν τη μηχανική απομνημόνευση

Ποιοι όμως είναι οι παράγοντες του εκπαιδευτικού μας συστήματος, που όχι μόνο ευνοούν αλλά εξαναγκάζουν ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών στην παπαγαλία;

Θα εστιάσουμε συνοπτικά σε ορισμένες πλευρές που καθορίζονται από τα αναλυτικά προγράμματα, διαπιστώνοντας:

1. *Εξοβελισμό της εποπτείας*: Όλα εκείνα τα μέρη της διδακτέας ύλης, στη Φυσική κύρια και τα Μαθηματικά, στα οποία υπάρχει άμεση αισθητηριακή αντίληψη, είτε έχουν εξοβελιστεί, είτε έχουν υποβαθμιστεί, είτε διδάσκονται φορμαλιστικά σύμφωνα με κάποιο αξιωματικό μοντέλο (Γεωμετρία), δηλαδή αποκομμένα από την εποπτεία, με άλλα λόγια από τις αισθήσεις και τη προσωπική εμπειρία. Όμως, από την εποχή του Αριστοτέλη είναι γνωστός και ρητά διατυπωμένος από το μεγάλο αυτό φιλόσοφο, ο ρόλος της αισθητηριακής αντίληψης στη διαδικασία σκέψης-μάθησης- γνώσης, ως πηγή των πρώτων γνώσεων, στις οποίες εδράζεται κάθε νέα γνώση. Έκτοτε, για τη ρεαλιστική σκέψη είναι γενικά αποδεκτό ότι «Κατά την πραγματική διεργασία της γνώσης, δεν μπορούμε ούτε να χωρίσουμε την αισθητηριακή αντίληψη από την εννοιακή σκέψη, ούτε να χωρίσουμε την εννοιακή σκέψη (συναρτημένη με τη γλώσσα) από την αισθητηριακή όψη της γνώσης. Έχουν σχηματίσει ένα ιδιαίτερο όλο κατά τη διεργασία της φυλογένεσης, ένα όλο που μπορεί αν διερευνηθεί από πολλές πλευρές. Όποιος εκλαμβάνει ένα προϊόν αφαίρεσης ως πραγματικότητα πλανάται, και αν προσπαθήσει να βασίσει πάνω του τις νοητικές του κατασκευές, πλανάται δυο φορές»¹⁵. Εξάλλου ο λαμπρός γεωμέτρης Φελίξ Κλάιν δεν δίστασε¹⁶ να παραδεχτεί: «Μου είναι αδύνατο να παρακολουθήσω ένα γεωμετρικό συλλογισμό καθαρά λογικά, χωρίς να έχω μπροστά μου διαρκώς το σχήμα στο οποίο αναφέρεται ο συλλογισμός».

¹⁴ Έβαλντ Ιλένκοφ σ.124

¹⁵ Adam Schaff, σ.196.

¹⁶ Morris Kline, *Γιατί δεν μπορεί να μάθει πρόσθεση ο Γιάννης*, Θεσσαλονίκη, Βάνιας, 1990, σ.75

2. *Ανορθολογισμό στην εξέλιξη και την αλληλουχία της ύλης.* Οι νέες γνώσεις δεν πατάνε στις προηγούμενες, η ύλη δεν εξελίσσεται πάντα από το γνωστό και συγκεκριμένο προς το άγνωστο και αφηρημένο το οποίο θα πρέπει να κατακτηθεί ώστε να αποτελέσει το αυριανό συγκεκριμένο.
3. *Ιμπεριαλισμός της εικόνας:* Δεν είναι καθόλου υπερβολή ο ισχυρισμός πως τα σχολικά βιβλία δεν είναι πλέον βιβλία γραπτού λόγου που διανθίζεται με κάποιες εικόνες, αλλά βιβλία εικόνων που διανθίζονται και με αποσπάσματα κειμένων, ή με κάποια κείμενα. Λείπει δηλαδή ο λόγος, ο αιτιολογικός στις θετικές επιστήμες, ο αφηγηματικός στην ιστορία, και σε μεγάλο βαθμό ο λογοτεχνικός και ποιητικός στα γλωσσικά¹⁷ μαθήματα. Η ουσία του προβλήματος, με τη χρήση εικόνων εκεί που δεν χρειάζεται, είναι ότι ενώ το παιδί έχει ήδη κατακτήσει από την πρώτη τάξη του Δημοτικού τον οπτικό δρόμο εισόδου του λόγου, την ανάγνωση δηλαδή της λέξης η οποία ενεργοποιεί άμεσα τη σκέψη, τα σχολικά βιβλία επιμένουν μέχρι την 6^η Δημοτικού (π.χ. βιβλία μαθηματικών) να πληροφορούν το παιδί για το τι πρέπει να κάνει, με εικόνες και χρωματιστές βούλες. Δηλαδή του επικοινωνούν πληροφορίες με τρόπο που προσιδιάζει στην παιδική σκέψη πριν αυτή κατακτήσει το δεύτερο σύστημα σήμανσης. Η παρουσία της εικόνας εκεί που ο λόγος πρέπει να είναι κυρίαρχος, μπορεί να εξοικονομεί σχολικό χρόνο, όμως στερεί το μαθητή από τη γόνιμη διαδικασία της ανάπλασης μέσω του λόγου της δικιάς του εικόνας. Με την αφήγηση ή την ανάγνωση καθένας αναπλάθει την προσωπική του εικόνα, τη διαμεσολαβημένη δηλαδή από τη προσωπικότητά του και τη ψυχολογική κατάσταση και φόρτιση της στιγμής. Πρόκειται για σημαντικό στοιχείο δημιουργικότητας, μια λειτουργία σημαντική της σκέψης, στην οποία η εκπαίδευση άρχιζε με της γιαγιάς τα παραμύθια από τη νηπιακή ηλικία. Και μπορεί μια εικόνα να αξίζει όσο χίλιες λέξεις, όπως λέει μια παλιά Κινέζικη παροιμία, ωστόσο χίλιες λέξεις που δεν περιέχουν κανένα στοιχείο συλλογισμού! Παρέχουν απλώς πληροφορίες. Αλλά η παράθεση πληροφοριών χωρίς τις αιτιακές τους σχέσεις δε συνιστούν γνώση, και βέβαια δεν καλλιεργούν την κριτική ικανότητα στην σκέψη.
4. *Συμπίεση εννοιών σε χαμηλότερες τάξεις.* Πρόκειται για καθολικό φαινόμενο στις δύο πρώτες βαθμίδες. Ακραίο παράδειγμα η εμφάνιση από τη πρώτη Δημοτικού μεταγλώσσας στη διδασκαλία της γραμματικής, χρήση παρενθέσεων σε αριθμητικές παραστάσεις και εισαγωγή των συμβόλων των ανισοτικών σχέσεων (μεγαλύτερος, μικρότερος).
5. *Δογματισμός.* Τα παιδιά διδάσκονται απόλυτες αλήθειες, ή αλλιώς η αλήθεια είναι εξ αποκαλύψεως. Ακόμη και στα μαθηματικά οι αποδείξεις συνεχώς υποβαθμίζονται από το σύστημα παιδείας-παραπαιδείας στη χώρα μας. Όχι μόνο δεν υπάρχει καμιά

¹⁷ Για προβλήματα των γλωσσικών μαθημάτων βλ. Μάρκος Σκούφαλος, *Η γλώσσα και η ανάπτυξη του ανθρώπινου ψυχισμού στο σύγχρονο σχολείο*, Χίος, Άλφα Πι, 2004, σ.100-140

συστηματική μεθοδολογία εισαγωγής στην έννοια και τη διαδικασία της απόδειξης, εκεί που θεωρητικά προβλέπεται, αλλά επίσης η επιλογή της ύλης, η λογικο-γλωσσική δομή των αποδείξεων όπως αυτές είναι γραμμένες στα σχολικά βιβλία - όπου κρίσιμα λογικά στοιχεία της διαδικασίας μένουν στο επίπεδο του υπονοούμενου- αφήνουν ελάχιστα περιθώρια κατάκτησης της μεθοδολογίας και της αναγκαιότητας της απόδειξης. Έτσι μεγάλη μερίδα για τη προϊούσα άνοδο του ανορθολογισμού στην εποχή μας, χρεώνεται στις διδακτικές αυτές πρακτικές. Μάλιστα, μιλάμε στα παιδιά για αξιώματα (γεωμετρία Α΄ Λυκείου) πριν στοιχειωδώς οικειοποιηθούν την έννοια της απόδειξης. Χωρίς απόδειξη όμως δεν υπάρχουν Μαθηματικά και χωρίς Μαθηματικά δεν υπάρχουν Μαθηματικοί, αλλά χρήστες μαθηματικών! Η θετική σκέψη είναι σε διωγμό και το εκπαιδευτικό σύστημα μετατρέπεται σταθερά σε θεραπεινίδα του ανορθολογισμού.

6. *Η ποσότητα της ύλης, διαθεματικότητα:* Το μείγμα είναι εκρηκτικό. Θα αναφέρουμε το παράδειγμα της ύλης της Άλγεβρας στα Μαθηματικά της Γ΄ Γυμνασίου. Η προβλεπόμενη ύλη είναι όλη η ύλη που προβλέπονταν για τις τρεις τάξεις του Λυκείου της δεκαετίας του 60. Εξαίρεση οι Πρόοδοι και οι Λογαριθμικές και Εκθετικές εξισώσεις, όμως άντ' αυτών υπάρχει ένα κεφάλαιο με Θεωρία Πιθανοτήτων. Ο μαθητής δεν προλαβαίνει να κατανοήσει τις έννοιες και να τις οικειοποιηθεί. Έρχεται και η Διαθεματικότητα να στείλει τη σκέψη του εκδρομή: από τα γραμμικά συστήματα της άλγεβρας, στο αναπνευστικό το πεπτικό κλπ. σύστημα, που μόνο το όνομα έχουν κοινό. Πολυδιάσπαση ενδιαφερόντων στα πλαίσια του ίδιου μαθήματος. Όμως ο άνθρωπος γνώρισε την πραγματικότητα, το όλον, μέσα από τις επιμέρους επιστήμες, και μόνο τότε σχημάτισε μια συγκεκριμένη εικόνα του, ανασυνθέτοντάς το. Γιατί, όπως ουσιαστικά απαιτεί η περίφημη διαθεματικότητα, εξατομικευμένα το όλον (π.χ, το νερό) θα πρέπει να θεωρηθεί ταυτόχρονα από όλες τις επιστήμες που το πραγματεύονται; Από τη σκοπιά της λειτουργίας της γλώσσας στη γνωστική διαδικασία, γνωρίζουμε πως ο μαθητής στην ενασχόλησή του με μια επιμέρους επιστήμη θα πρέπει να λειτουργεί με το γλωσσικό αισθητήριο της αντίστοιχης ειδικής επιστημονικής γλώσσας. Το γεγονός αυτό απαιτεί ιδιαίτερη αυτοσυγκέντρωση, η οποία επιτυγχάνεται όταν το μάθημα γίνεται σε αίθουσες εργαστήρια των μαθημάτων και όχι αίθουσες των τάξεων. Η διαθεματικότητα ακυρώνει αυτήν την αυτοσυγκέντρωση, σκοτώνοντας τη λογική των μαθητών στη ρίζα της.
7. *Οι εισαγωγικές για τα πανεπιστήμια εξετάσεις:* Όπου, η μεν εξεταστέα ύλη ορίζεται με βάση ορισμένες σελίδες από τα βιβλία του Λυκείου, η δε βαθμολόγηση γίνεται με αντιπαραβολή γραπτού-βιβλίου. Οπότε ο σκοπός για επιτυχία στις εξετάσεις, καθαγιάζει το μέσον της παπαγαλίας.