Τομέας Παιδαγωγικής

Ιστορίας, και Φιλοσοφίας

των Μαθηματικών

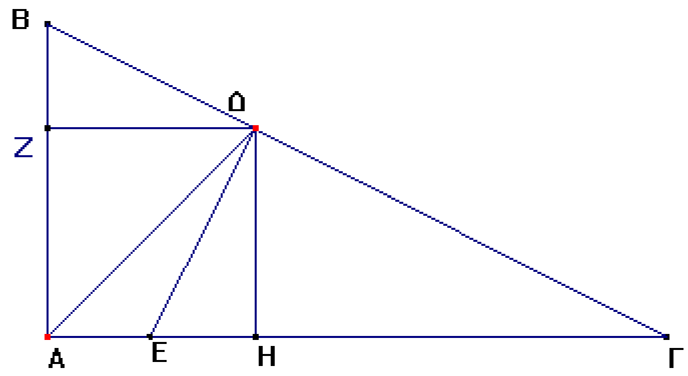
«Η Ευκλείδεια γεωμετρία και η διδασκαλία της»

Λύσεις Θεμάτων Εξέτασης 01-02-2016

ΘΕΜΑ 1α [2]

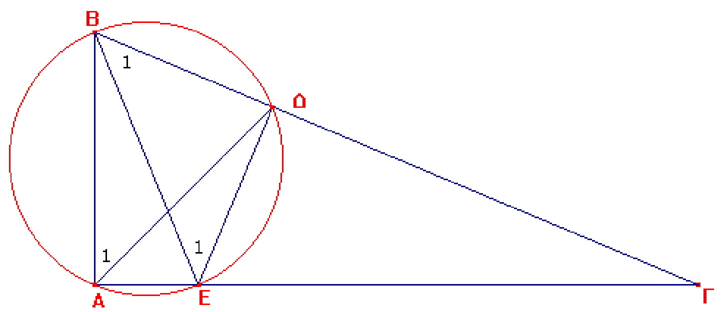
Σε τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\angle A=90^{O}$) η διχοτόμος της γωνίας Α, τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Αν η κάθετος επί την ΒΓ στο Δ τέμνει την ΑΓ στο Ε, τότε ΔΒ=ΔΕ.

Απόδειξη:



Από το Δ φέρνω τις κάθετες ΔΗ και ΔΖ πάνω στις πλευρές του τριγώνου, και συγκρίνω τα τρίγωνα ΔΕΗ και ΔΖΒ: Αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος, ΔΗ=ΔΖ. Επίσης $\angle$ΔΕΗ=$\angle$ΔΒΖ, ως συμπληρώματα της γωνία Γ, από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ. Άρα τα τρίγωνα ΔΕΗ και ΔΖΒ είναι ίσα ως ορθογώνια με μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες. Άρα ΔΒ=ΔΕ.

Άλλη απόδειξη:

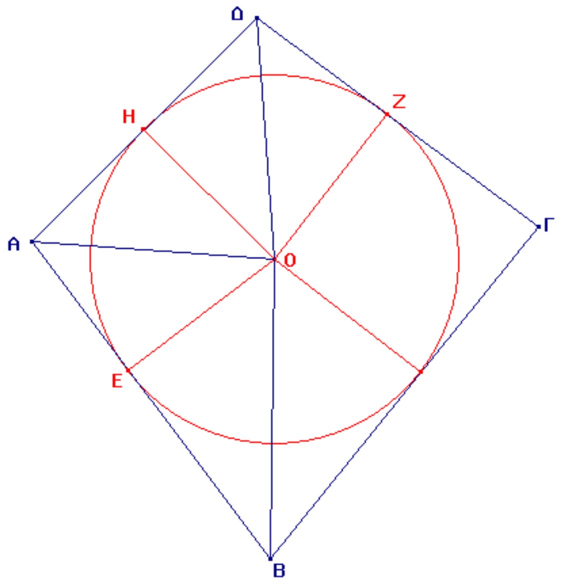


Φέρνουμε την ΒΕ και βλέπουμε ότι φαίνεται από το Α και από το Δ υπό ορθή γωνία, άρα το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Οπότε $\angle A_1=E_1= 45^o$, καθότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της ορθή, από τα δεδομένα. Επομένως στο τρίγωνο ΒΕΔ, που είναι ορθογώνιο από την κατασκευή θα είναι και $B_1=45^o$, δηλαδή το ΑΕΔ είναι ισοσκελές. Άρα ΔΒ=ΔΕ.

ΘΕΜΑ 1β [2]

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα τετράπλευρο περιγράψιμο σε κύκλο είναι οι διχοτόμοι τριών γωνιών του να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Το ευθύ (ικανή): Αν ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο, τότε οι διχοτόμοι τριών γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.



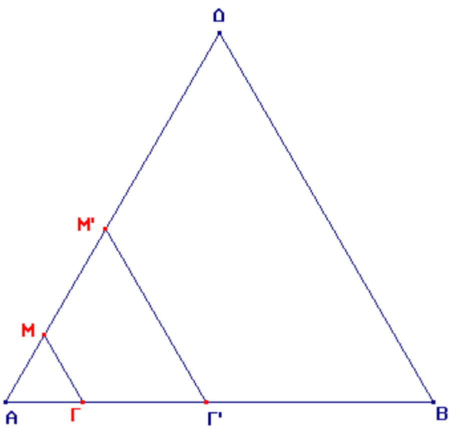
Απόδειξη: Έστω ένα τυχαίο τετράπλευρο το ΑΒΓΔ, περιγεγραμμένο στον κύκλο Ο. Οι πλευρές του είναι από τον ορισμό εφαπτόμενες στον κύκλο. Όμως από ένα σημείο εκτός του κύκλου άγονται ίσες εφαπτόμενες και η διχοτόμος των γωνιών τους διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, δηλαδή από το ίδιο σημείο.

Το αντίστροφο (αναγκαία): Αν οι διχοτόμοι τριών γωνιών ενός τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε το τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο.

Απόδειξη: Έστω ένα τυχαίο τετράπλευρο το ΑΒΓΔ στο οποίο οι διχοτόμοι τριών γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, έστω το Ο. Αν φέρουμε τις κάθετες από το Ο προς τις πλευρές, τις ΟΕ, ΟΗ, ΟΖ,… τότε αυτές θα είναι ίσες μεταξύ τους αφού κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας απέχει εξίσου από τις πλευρές. Άρα τα Ε,Η,Ζ,.. βρίσκονται πάνω στην ίδια περιφέρεια η οποία εφάπτεται στις πλευρές, αφού ΟΕ⊥ΑΒ, κλπ..

ΘΕΜΑ 2α [2]

Δίδεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα τυχαίο σημείο πάνω σ΄ αυτό το Γ. Με πλευρά την ΑΓ κατασκευάζεται ισόπλευρο τρίγωνο, με κορυφή έστω Μ. Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος του Μ καθώς το Γ διατρέχει την ΑΒ.

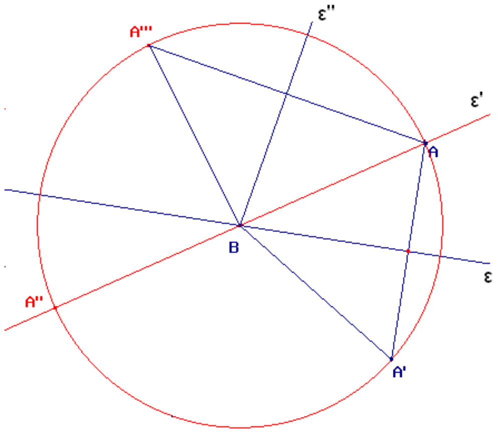


Εύρεση: Δύο ακραία σημεία του τόπου είναι το Α και το Δ, καθότι όταν το Γ συμπέσει με το Α θα συμπέσει και το Μ, ενώ όταν το Γ συμπέσει με το Β θα έχουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΒ. Το Μ λοιπόν θα διατρέχει την ΑΔ που είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

Αντίστροφα, ένα τυχόν σημείο, το Μ΄, του ΑΔ αποτελεί κορυφή ισοπλεύρου τριγώνου όταν το Γ συμπέσει με το σημείο που η παράλληλος από το Μ΄ προς την ΒΔ, θα τμήσει την ΑΒ, δηλαδή το Γ΄.

ΘΕΜΑ 2β [2]

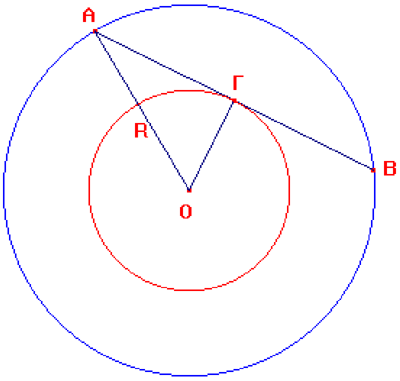
Δίδονται δύο σημεία τα Α και Β. Να βρεθεί ο Γεωμετρικός τόπος των συμμετρικών του Α ως προς τις ευθείες που διέρχονται από το Β.



Εύρεση: Έστω μια τέτοια ευθεία η Βε, και Α΄ το συμμετρικό του Α. Διαπιστώνουμε ότι Α΄Β=ΒΑ, από το ισόπλευρο ΑΒΑ΄. Άρα το Α΄ επέχει σταθερή απόσταση ΑΒ, από το σταθερό σημείο Β. Οπότε ο ζητούμενος Γεωμετρικός Τόπος είναι η περιφέρεια του κύκλου που έχει κέντρο το Β και ακτίνα ΑΒ.

Αντίστροφά, το τυχαίο σημείο του τόπου το, Α΄΄΄, αποτελεί συμμετρικό του Α, όπως φαίνεται από το ισόπλευρο ΒΑΑ΄΄΄.

ΘΕΜΑ 3α [2]



Σε ένα τυχαίο κύκλο ακτίνας R, να κατασκευαστεί μια χορδή μήκους $R\sqrt{3}$.

Ανάλυση: Έστω κύκλος Ο με ακτίνα R, και έστω μία χορδή του η ΑΒ, ΑΒ= $R\sqrt{3}$. Φέρνουμε το απόστημα ΟΓ και την ακτίνα ΟΑ. Στο τρίγωνο ΑΟΓ, άρα, ΑΓ= $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, οπότε ΟΓ= $\frac{R}{2}$(από το πυθαγόρειο θεώρημα)

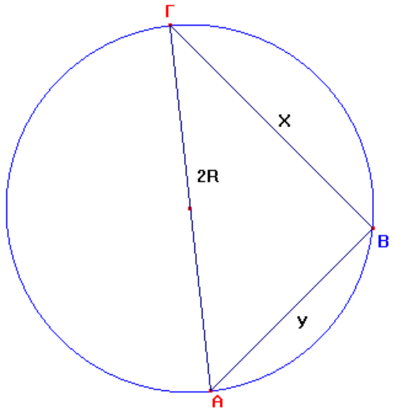
Σύνθεση: Στον κύκλο (Ο,R) γράφουμε ένα εσωτερικό κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα $\frac{R}{2}$.

Μια εφαπτομένη στον κύκλο αυτό ορίζει χορδή του (Ο,R) με $R\sqrt{3}$.

Απόδειξη: Φέρνουμε το απόστημα και υπολογίζουμε με το πυθαγόρειο το μισό της χορδής $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ κλπ.

Διερεύνηση: Το πρόβλημα έχει πάντα λύση γιατί η ακτίνα του εσωτερικού κύκλου, το $\frac{R}{2}$

Είναι πάντα κατασκευάσιμο.



<u>**Άλλη Λύση**</u> **Ανάλυση:** Έστω ο δοσμένος κύκλος ακτίνας R και έστω η ζητούμενη χορδή ΒΓ=Χ= $R\sqrt{3}$.

Από το ένα άκρο της χορδής, έστω το Γ, φέρνουμε τη διάμετρο ΓΑ του κύκλου. Φέρνουμε και την ΑΒ (=y). Το ΑΒΓ είναι προφανώς ορθογώνιο, αφού η ∠Β βαίνει σε ημικύκλιο. Οπότε από το Πυθαγόρειο έχουμε:

$$(2R)^2 = (R\sqrt{3})^2 + y^2$$

Που σημαίνει $y=R$.

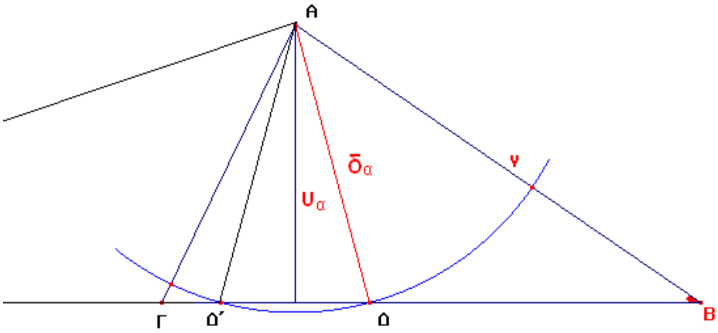
Σύνθεση: Από ένα άκρο μιας τυχαίας διαμέτρου του δοσμένου κύκλου, έστω της ΑΓ, γράφουμε μια χορδή ίση με *R*, την ΑΒ. Η ζητούμενη χορδή είναι η ΒΓ.

Απόδειξη: Φαίνεται από την ανάλυση.

Διερεύνηση: Το πρόβλημα έχει πάντα λύση, καθότι πάντα κατασκευάζεται στο άκρο μιας διαμέτρου μια χορδή ίση με την ακτίνα.

ΘΕΜΑ 3β [2]

Να κατασκευαστεί τρίγωνο από τα στοιχεία γ, ∠Β, και δ_α

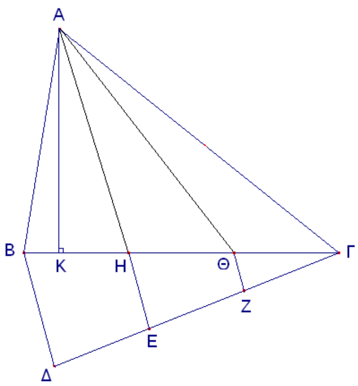


Ανάλυση: Έστω ότι το τρίγωνο έχει κατασκευαστεί και είναι το ΑΒΓ, με διάμετρο την δ_α. Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο ΑΔΒ, γνωρίζουμε τις πλευρές δ_α, γ, και τη γωνία Β. Το τρίγωνο λοιπόν αυτό είναι κατασκευάσιμο.

Κατασκευή: Στο ένα άκρο που το ονομάζουμε Β, της πλευράς γ κατασκευάζουμε γωνία Β. Με κέντρο το άλλο άκρο της γ, που το ονομάζουμε Α, και ακτίνα ίση με δ_α, γράφουμε περιφέρεια που τέμνει την άλλη πλευρά της γωνία Β στο Δ (και στο Δ΄). Μα κορυφή το Α και πλευρά την ΑΔ, κατασκευάζουμε γωνία ΔΑΓ ίση με τη γωνία ΔΑΒ. Το ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο, καθώς διαθέτει τα δοθέντα στοιχεία. (Το πρόβλημα έχει και άλλες λύσεις αλλά ζητείται μία)

ΘΕΜΑ 4α [1]

Να χωριστεί δοθέν τρίγωνο σε τρία ίσα (ισεμβαδικά) τρίγωνα με τη βοήθεια ευθειών που διέρχονται από την ίδια κορυφή.



Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ, χωρισμένο από τις ΑΗ, και ΗΘ σε τρία ισεμβαδικά τρίγωνα τα ΑΒΗ, ΑΗΘ και ΑΘΓ, τα οποία έχουν το ίδιο ύψος, το ΑΚ, οπότε πρέπει να έχουν και ίσες βάσεις, δηλαδή πρέπει ΒΗ=ΗΘ=ΘΓ.

Κατασκευή: Χωρίζουμε τη βάση του δοσμένου τριγώνου σε τρία ίσα μέρη, με τη βοήθεια της τυχούσας ΓΔ πάνω στην οποία παίρνουμε τυχαία ΓΖ=ΖΕ=ΖΔ και φέρνουμε τις παράλληλες από τα Ε και Ζ προς την ΔΒ….

ΘΕΜΑ 4β [2]

Δίδεται ορθός κύλινδρος με ακτίνα βάσης R μέσα στον οποίο είναι εγγεγραμμένη μια σφαίρα.

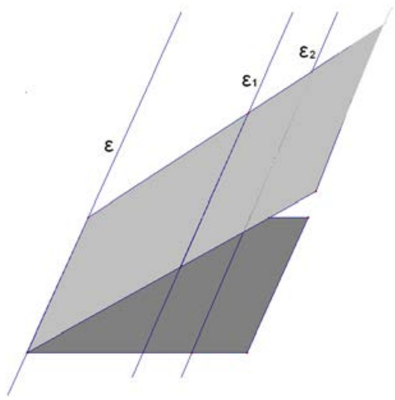
i) Συγκρίνετε την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου με την επιφάνεια της σφαίρας.

ii) Ποιος είναι ο όγκος του στερεού τον οποίο υπολείπεται η σφαίρα του Κυλίνδρου.

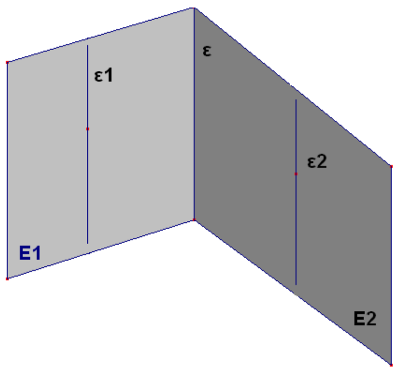
Λύση: (απλές εφαρμογές των σχετικών τύπων)

ΘΕΜΑ 5 [2]

Έστω δύο παράλληλες ευθείες στο χώρο οι $ε_1$ και $ε_2$, από τις οποίες διέρχονται τα επίπεδα $Ε_1$ και $Ε_2$ αντίστοιχα. Αν τα δύο αυτά επίπεδα τέμνονται κατά την ευθεία ε, δείξτε ότι η ε είναι παράλληλη προς τις $ε_1$ και $ε_2$.



ή



Απόδειξη: Ξέρουμε πως αν μια ευθεία είναι παράλληλη σε μια ευθεία κάποιου επιπέδου τότε είναι παράλληλη στο επίπεδο. Οπότε, αφού $ε_1 \in Ε_1$ και $ε_2 // ε_1$, άρα $ε_2 // Ε_1$. Αν λοιπόν η $ε_2$ δεν ήταν παράλληλη στην ε, θα είχε κοινό σημείο με αυτήν άρα και με το επίπεδο $Ε_1$, που είναι άτοπο γιατί $ε_2 // Ε_1$. Άρα $ε_2 // ε$. Με όμοιο συλογισμό $ε_1 // ε$.

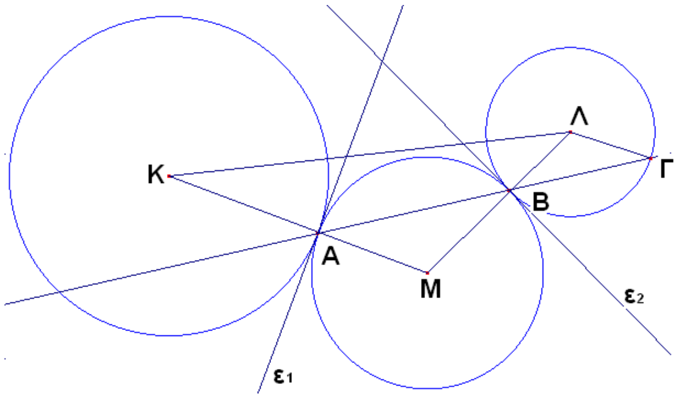
Τομέας Παιδαγωγικής
Ιστορίας, και Φιλοσοφίας
των Μαθηματικών

«Η Ευκλείδεια γεωμετρία και η διδασκαλία της»
Εξέταση 10-09-2015

ΘΕΜΑ 1 [2]

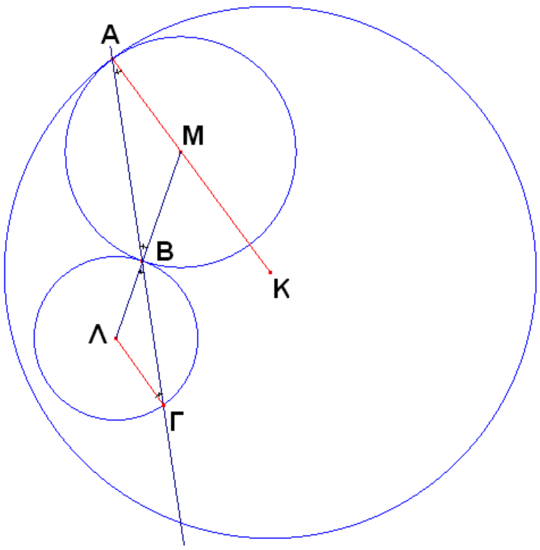
Δίδονται δύο τυχαίοι, μη τεμνόμενοι μεταξύ τους, κύκλοι οι Κ, Λ και ένας τρίτος ο Μ που εφάπτεται στους άλλους δύο στα Α και Β αντίστοιχα. Εάν η ΑΒ τέμνει τον Λ στο Γ, δείξτε ότι ΚΑ//ΛΓ.

Υπάρχουν δύο δυνατότητες. Οι κύκλοι να είναι ο ένας εκτός του άλλου (i), ή να είναι εντός (ii).



i) Έστω Κ και Λ οι δύο δοσμένοι κύκλοι, με τον Λ εκτός του Κ, και ο Μ που εφάπτεται μαζί τους στα Α και Β, με τη ΑΒ να τέμνει το Λ στο Γ. Πρέπει να δείξουμε ότι ΚΑ//ΛΓ.

Ξέρουμε ότι η διάκεντρος σε δύο τεμνόμενους κύκλους διέρχεται από το σημείο επαφής. (αν δεν το θυμόμαστε φαίνεται εύκολα αν φέρουμε τις κοινές εφαπτόμενες) Άρα η ΚΑΜ και η ΜΒΛ είναι ευθείες(*). Επειδή ΜΑ=ΜΒ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, το τρίγωνο ΑΜΒ

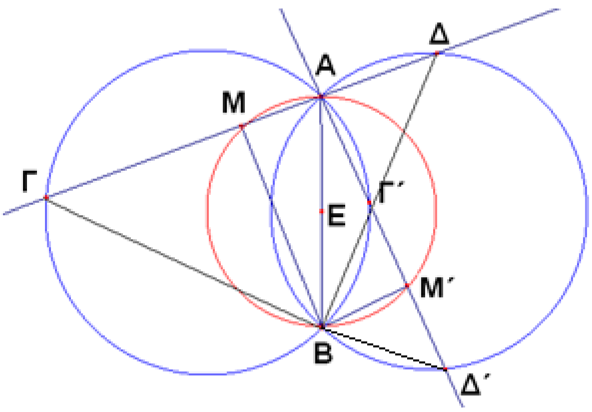


είναι ισοσκελές. Για τον ίδιο λόγο και το ΒΛΜ είναι ισοσκελές. Και αφού οι παρά την βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, έχουμε: ∠ΜΑΒ=∠ΜΒΑ και ∠ΛΓΒ=∠ΛΒΓ. Αλλά ∠ΜΒΑ=∠ΓΒΛ ως κατακορυφήν από (*). Οπότε ∠ΜΑΒ=∠ΒΓΛ. Όμως αυτέ είναι εντός εναλλάξ των ΛΓ και ΚΑ που τέμνονται από την ΑΓ. Το οποίο ήταν το προς απόδειξη ζητούμενο.

ii) Η δεύτερη περίπτωση έχει την ίδια απόδειξη.

ΘΕΜΑ 2 [2]

Δίδονται δύο ίσοι κύκλοι οι οποίοι τέμνονται στα Α και Β. Φέρνουμε από το Α μια μεταβλητή τέμνουσα τους δύο κύκλους στα Γ και Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της ΓΔ όταν η μεταβλητή τέμνουσα περιστρέφεται γύρω από το Α.

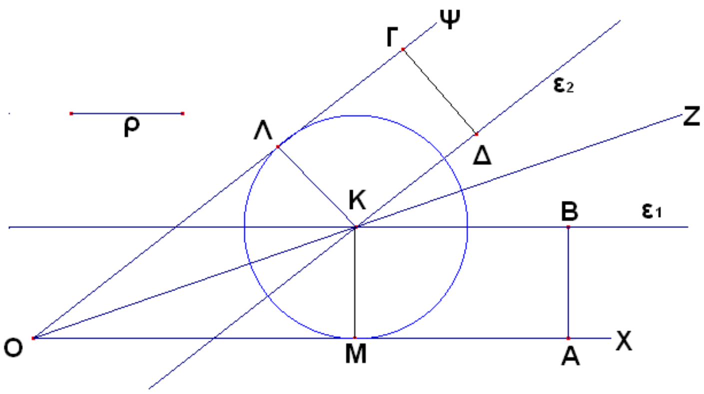


Έστω οι δοσμένοι ίσοι μεταξύ τους κύκλοι τεμνόμενοι στα Α και Β, και η διερχόμενη από το Α ευθεία του τέμνει στα Γ και Δ. Έστω Μ το μέσον της ΓΔ. Φέρνουμε τις ΒΔ και ΒΓ και βλέπουμε ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές διότι ∠ΒΓΔ=∠ΒΔΓ καθότι είναι εγγεγραμμένες σε ίσους κύκλους και βαίνουν σε ίσα τόξα, με χορδή την ΑΒ. Άρα η ΒΜ, που είναι διάμεσος είναι και ύψος. Δηλαδή η γωνία ΒΜΑ είναι ορθή, που σημαίνει ότι το σημείο Μ βλέπει την ΑΒ υπό ορθή γωνία. Άρα βρίσκεται πάνω σε κύκλο με κέντρο το μέσον Ε της ΑΒ και ακτίνα ΑΒ/2. Ο κύκλος αυτός είναι ο ζητούμενος Γεωμετρικός Τόπος.

Πράγματι, (αντίστροφο) έστω Μ΄ ένα τυχαίο σημείο του κύκλου αυτού. Πρέπει να δείξουμε ότι το Μ΄ είναι μέσον ενός ευθυγράμμου τμήματος, που είναι τμήμα μιας ευθείας που διέρχεται από το Α και το οποίο αποκόπτεται από τους δύο δοθέντες κύκλους. Φέρνουμε την Μ΄Α και έστω Γ΄ και Δ΄ τα σημεία στα οποία τέμνει αντίστοιχα του δύο κύκλους. Πρέπει να αποδείξουμε ότι Μ΄Γ΄=Μ΄Δ΄, Ενώνουμε τα Γ΄και Δ΄ με το Β. Αφού το Μ΄ είναι σημείο του τόπου άρα η ΒΜ΄Γ΄ είναι ορθή, δηλαδή ΒΜ΄ είναι ύψος στο ΒΔ'Γ'. Επίσης το ΒΔ΄Γ΄ είναι ισοσκελές διότι ∠ΒΔ΄Γ΄=∠ΒΓ΄Δ΄, καθότι η ∠ΒΔ΄Γ΄και η ∠ΒΓΆ είναι παραπληρωματικές ως εγγεγραμμένες σε ίσους κύκλους και βαίνουν σε παραπληρωματικά τόξα. Αφού λοιπόν η ΒΜ΄ είναι ύψος σε ισοσκελές τρίγωνο άρα είναι και διάμεσος και το Μ΄ είναι μέσον του Γ΄Δ΄.

ΘΕΜΑ 3 [2]

Να κατασκευαστεί κύκλος **δεδομένης** ακτίνας, ο οποίος να εφάπτεται στις πλευρές **δεδομένης** γωνίας.



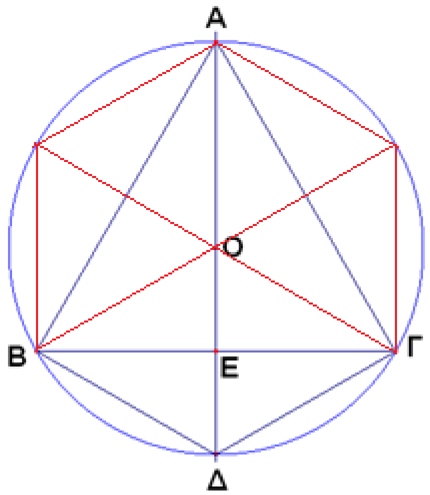
Ανάλυση**:** έστω ότι ο κύκλος έχει κατασκευαστεί. Αφού εφάπτεται στις πλευρές της γωνία το κέντρο του ισαπέχει από τις πλευρές της γωνία. Δηλαδή βρίσκεται πάνω στην διχοτόμο της γωνίας. Επίσης αφού απέχει σταθερή απόσταση ρ από τις πλευρές, άρα βρίσκεται πάνω σε μια παράλληλο προς την κάθε πλευρά που απέχει ρ από την πλευρά.

Σύνθεση: Έστω η γωνία ΧΟΨ και ένα ευθύγραμμο τμήμα ρ. Φέρνω την διχοτόμο της γωνίας και κατασκευάζω και μια παράλληλο, την ε_1 προς την πλευρά ΟΧ, που να απέχει ρ από αυτήν. Η τομή των δύο ευθειών είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου.

(ή: κατασκευάζω τις δύο παράλληλες προς τις πλευρές της γωνία ευθείες και σε απόσταση ρ από αυτές. Η τομή τους είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου)

ΘΕΜΑ 4 [2]

Σε δοθέντα κύκλο ακτίνας ρ να εγγραφεί ισόπλευρο τρίγωνο και να υπολογιστεί η πλευρά του και το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας του κύκλου.



i) Έστω κύκλος με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ, και έστω ότι έχει εγγραφεί ισόπλευρο τρίγωνο το ΑΒΓ. Φέρνουμε το ύψος ΑΕ, το οποία θα περάσει από το κέντρο Ο, ως κάθετο στη χορδή ΒΓ, και θα διχοτομήσει τη $\angle$ΒΑΓ. Άρα $\angle$ΔΑΓ=30^{o} οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ, ΔΓ=ΟΔ/2=ρ. Φέρνοντας και τα άλλα δύο ύψη, βλέπουμε ότι ορίζονται οι κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου με πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου. Το ισόπλευρο τρίγωνο λοιπόν το εγγεγραμμένο σε δοσμένο κύκλο, κατασκευάζεται με τη βοήθεια του κανονικού εξαγώνου.

ii) Με εφαρμογή του Πυθ. Θεωρ. Στο τρίγωνο ΔΕΓ(ΔΕ=ρ/2) (ή στο ΑΕΓ) έχουμε την πλευρά είναι $\rho\sqrt{3}$, και το εμβαδόν $\frac{3\sqrt{3}}{4}\ \rho^2$

ΘΕΜΑ 5 [2]

Δίδεται ένα επίπεδο, το π, και ένα σημείο πάνω σ' αυτό, το Α. Να κατασκευαστεί ευθεία διερχόμενη από το Α η οποία να είναι κάθετος στο π.

Βλέπε: *« Έλασσον γεωμετρικόν»* Κατασκευή 8.5.2, σελ 381

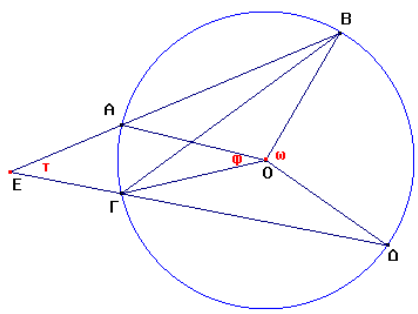
Οποιαδήποτε άλλη διαφορετική λύση, ή απόδειξη, θα αξιολογηθεί ως ορθή αν είναι τέτοια.

Θέμα 1 [2]

Δείξτε ότι:

Η γωνία που σχηματίζεται από δύο χορδές ενός κύκλου, οι οποίες τέμνονται έξω από αυτόν, είναι ίση με την ημιδιαφορά των δύο επικέντρων γωνιών οι οποίες βαίνουν στα τόξα που περιέχονται μεταξύ των χορδών αυτών.

Απόδειξη: Έστω ένας κύκλος, ο Ο, και ΑΒ, ΓΔ δύο χορδές του, που τέμνονται σ’ ένα σημείο έξω απ’ αυτόν, το Ε, και σχηματίζουν την γωνία $\boldsymbol{\tau}$. Έστω ακόμη ΑΓ και ΒΔ τα (μικρά) τόξα που αποκόπτουν οι χορδές αυτές και ω και φ οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες. Πρέπει να δείξουμε ότι:



$$\tau = \frac{\omega - \varphi}{2}$$

Από το γεγονός ότι μια εγγεγραμμένη γωνία είναι το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο, απορρέουν οι σχέσεις:

$\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = \frac{\omega}{2}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \frac{\varphi}{2}$.

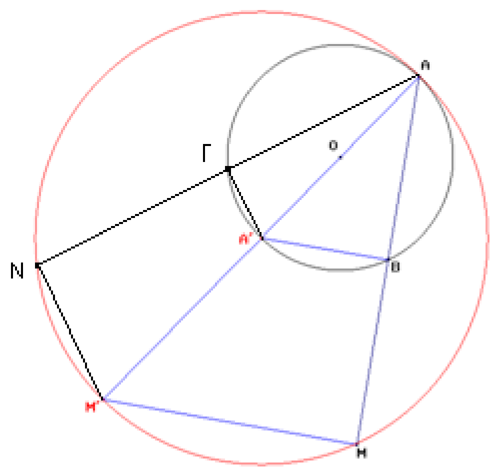
Από το τρίγωνο δε ΕΓΒ, έχουμε ότι $\tau = \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta - \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ Απ’ όπου με αντικατάσταση απορρέει το ζητούμενο.

Θέμα 2 [2]

Δίδεται κύκλος με κέντρο Ο και ένα σημείο Α πάνω σ’ αυτόν. Φέρουμε από το Α μια τυχαία χορδή την ΑΒ και πάνω στην προέκτασή της προς το Β παίρνουμε ένα σημείο, το Μ, τέτοιο ώστε ΑΒ=ΒΜ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ όταν το Β διατρέχει τον κύκλο.

Απάντηση

Ανάλυση1: Κατασκευάζουμε το σχήμα σύμφωνα με την εκφώνηση και προσπαθούμε να εντοπίσουμε κάποια κατασκευάσιμα σημεία το τόπου αναζητώντας την κατασκευή του από τα δεδομένα του προβλήματος:



Διατρέχοντας το σημείο Β τον κύκλο Ο, κινούμενο προς τα Α η ΒΑ θα μηδενιστεί που σημαίνει πως το Α είναι σημείο του τόπου. Επίσης το Β θα περάσει από το αντιδιαμετρικό Α΄ του Α. Η προέκταση κατά ίσο τμήμα της ΑΑ΄ είναι η ΑΜ΄. Το Μ΄ λοιπόν είναι σημείο του τόπου και κατασκευάσιμο. Το ενώνουμε με το Μ και διαπιστώνουμε ότι: Η Α΄ΒΑ γωνία είναι ορθή αφού βαίνει σε ημικύκλιο. Επίσης στο τρίγωνο ΑΜ΄Μ, από την κατασκευή, τα Α΄ και Β είναι μέσα των πλευρών ΑΜ΄ και ΑΜ, οπότε από γνωστό θεώρημα συνάγεται ότι η Α΄Β είναι παράλληλη στην ΜΜ΄, που σημαίνει ότι η γωνία Μ΄ΜΑ είναι ορθή. Δηλαδή το τυχαίο σημείο Μ του τόπου βλέπει υπό ορθή γωνία το κατασκευάσιμο ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ΄, βρίσκεται επομένως πάνω σ' ένα κύκλο με κέντρο το αντιδιαμετρικό σημείο του Α, το Α΄, και ακτίνα τη διάμετρο του δοθέντος κύκλου.

Ανάλυση 2: Αποδείξαμε ότι τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται πάνω σε προεκτάσεις χορδών οι οποίες είναι ίσες με τη χορδή βρίσκονται στο κύκλο που σχεδιάσαμε ως τόπο, πρέπει τώρα να δείξουμε ότι ο τόπος δεν περιέχει παρά μόνο τέτοια σημεία, ότι δηλαδή κάθε σημείο του τόπου έχει την ορίζουσα ιδιότητα του τόπου.

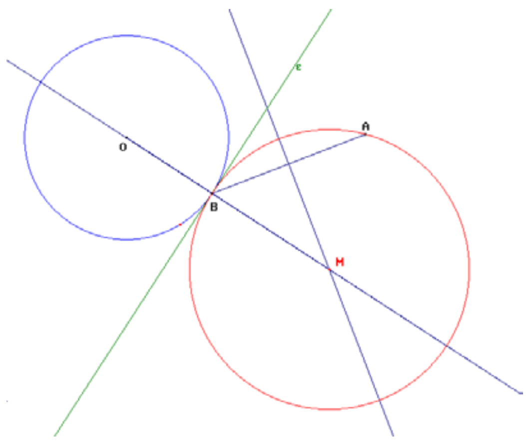
Έστω λοιπόν ένα τυχαίο σημείο του τόπου το Ν. Το ενώνουμε με το Α και έστω Γ η τομή της ΝΑ με τον κύκλο και αποδεικνύουμε ότι ΑΓ=ΑΝ.

Θέμα 3 [2]

Δίδεται κύκλος με κέντρο Ο, ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου, το Α, και ένα σημείο πάνω στον δοθέντα κύκλο, το Β. Να κατασκευαστεί κύκλος διερχόμενος από το Α και εφαπτόμενος του δοθέντα κύκλου στο Β. (υπόδειξη: ακολουθείστε τη μέθοδο Ανάλυση-Σύνθεση-Απόδειξη-Διερεύνηση)

Απάντηση

Ανάλυση: Έστω, σύμφωνα με την εκφώνηση, κύκλος, ο Ο, ένα σημείο το Β πάνω σ΄ αυτόν και ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου το Α. Επειδή ο ζητούμενος κύκλος θα εφάπτεται του Ο στο Β, σημαίνει ότι το κέντρο του θα βρίσκεται πάνω στην ευθεία που περνά από τα Ο και Β, καθότι το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων κύκλων βρίσκεται πάνω στη διάκεντρο. Δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου, έστω Μ, του ζητούμενου κύκλου είναι η ευθεία που περνά από τα Ο και Β. Όμως ο κύκλος πρέπει να περνά από το Β και από το Α, που σημαίνει πως το κέντρο του Μ πρέπει να ισαπέχει από τα Β και Α, δηλαδή βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

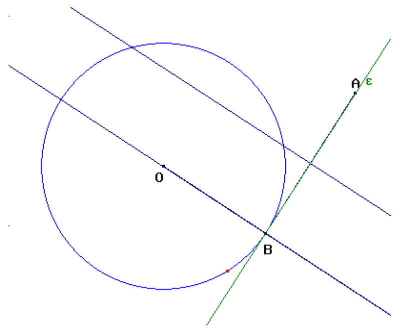


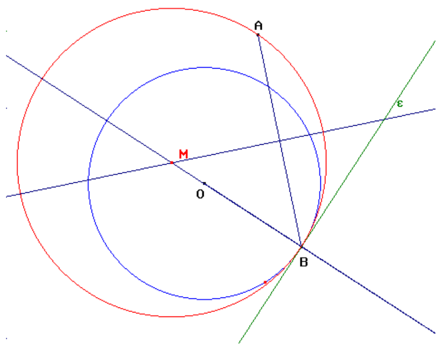
Σύνθεση: Γράφουμε την ευθεία που περνά από τα Ο και Β, τη μεσοκάθετο στο ΑΒ και έστω Μ το σημείο τομής τους. Με κέντρο το Μ και ακτίνα την ΜΒ γράφουμε ένα κύκλο που είναι ο ζητούμενος.

Απόδειξη: Ο κύκλος με κέντρο Μ είναι ο ζητούμενος καθότι είναι εφαπτόμενος του Ο, αφού η ΜΟ είναι διάκεντρος και έχει ακτίνα ΜΒ, και διέρχεται από το Α αφού το κέντρο του βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο στο ΑΒ, δηλαδή ΜΒ=ΜΑ.

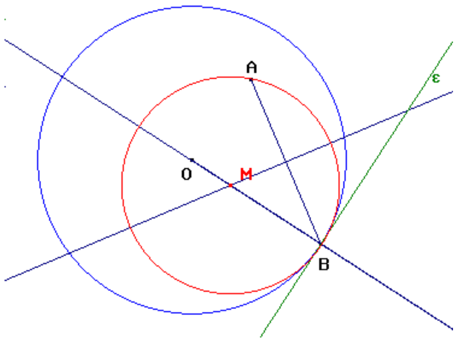
Διερεύνηση: Θα πρέπει να εξετάσουμε αν η κατασκευή είναι δυνατή για κάθε δυνατή θέση του Α.

1) Για να είναι δυνατή η κατασκευή του ζητούμενου κύκλου θα πρέπει οι δύο γεωμετρικοί τόποι μέσω των οποίων προσδιορίζεται το κέντρο του το Μ, να τέμνονται. Η μόνη περίπτωση που η μεσοκάθετος στην ΑΒ δεν τέμνει την ΟΒ είναι να είναι παράλληλη με αυτήν που σημαίνει ότι και οι δύο πρέπει να είναι κάθετες πάνω στην ίδια ευθεία, δηλαδή η ΑΒ είναι κάθετη στην ΟΒ, δηλαδή το Α βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε που είναι κάθετη στην ΟΒ στο Β. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις ο ζητούμενος κύκλος είναι κατασκευάσιμος.





2) Η ε χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα. Αν το Α βρεθεί στο αριστερό ημιεπίπεδο τότε οι δύο κύκλοι θα είναι πάλι εφαπτόμενοι αλλά ο αρχικός κύκλος θα εφάπτεται εσωτερικά στον ζητούμενο.



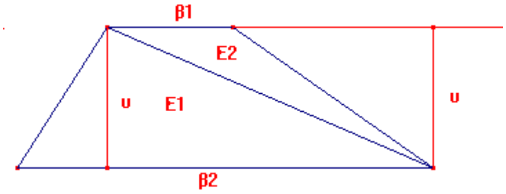
3) Τέλος αν το σημείο Α είναι εσωτερικό του κύκλου, το πρόβλημα πάλι έχει λύση, ο δε ζητούμενος κύκλος εφάπτεται εσωτερικά στον αρχικό:

Θέμα 4 [2]

Υπάρχουν τουλάχιστον πέντε διαφορετικοί τρόποι εύρεσης ενός γενικού τύπου που να δίνει το εμβαδόν ενός τραπεζίου, συναρτήσει των δύο βάσεων, β_1 και β_2, και του ύψους υ. Βρείτε δύο από αυτούς και προκρίνεται τον ένα τον οποίο θεωρείτε καταλληλότερο για διδακτικούς σκοπούς στην Α΄ Λυκείου.

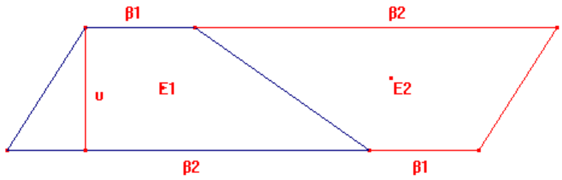
Απάντηση

<u>1η περίπτωση</u>: Μια διαγώνιος χωρίζει το τραπέζιο σε δύο ισοϋψή τρίγωνα :



$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 = \frac{\beta_2 \upsilon}{2} + \frac{\beta_1 \upsilon}{2} = \frac{(\beta_1 + \beta_2)\upsilon}{2}$$

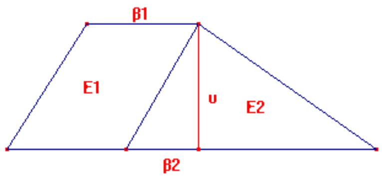
<u>2η Περίπτωση</u>: Προεκτείνουμε τις βάσεις και προσθέτουμε στη μικρή τη μεγάλη και αντίστροφα. Προκύπτει παραλληλόγραμμο αποτελούμενο από δύο ίδια (ίσα και όμοια) τραπέζια



$\mathrm{E}_{\pi\alpha\rho/\mu o \upsilon} = (\beta_1 + \beta_2)\upsilon$, και

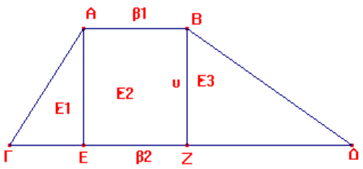
$$\mathrm{E} = \frac{(\beta_1 + \beta_2)\upsilon}{2}$$

<u>3η Περίπτωση</u>:



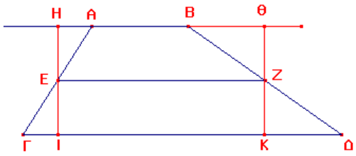
$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 = \beta_1 \upsilon + \frac{(\beta_2 - \beta_1)\upsilon}{2} = \frac{(\beta_1 + \beta_2)\upsilon}{2}$$

<u>4η Περίπτωση</u>:



$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3 = \frac{\Gamma\mathrm{E}\upsilon}{2} + \beta_2 \upsilon + \frac{\Delta\mathrm{Z}\upsilon}{2} = \frac{(\Gamma\mathrm{E} + \beta_2 + \Delta\mathrm{Z}) + \beta_2}{2} = \frac{(\beta_1 + \beta_2)\upsilon}{2}$$

<u>5η Περίπτωση</u>: Φέρνουμε τη διάμεσο ΕΖ η οποία ξέρουμε πως είναι $\mathrm{E}Z = \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{2}$



Από τα Ε και Ζ φέρνουμε κάθετες, οπότε τα σχηματιζόμενα να τρίγωνα είναι ΕΓΙ=ΕΗΑ και ΖΚΔ=ΖΘΒ, ως ορθογώνια με τις υποτείνουσες ίσες και μία οξεία γωνία. Άρα (ΑΒΓΔ)=(ΗΙΚΖ)= $\mathrm{E} = \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{2}\upsilon$

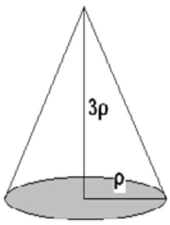
Για διδακτικούς τώρα σκοπούς προκρίνεται η δεύτερη λύση, που μεθοδολογικά είναι ίδια με τη μεθοδολογία εύρεσης ενός τύπου για το εμβαδόν του τριγώνου, ώστε να δοθεί η ευκαιρία για τη σχετική επανάληψη.

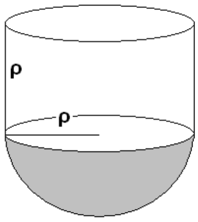
(Η πρώτη επίσης λύση –καθώς και η τρίτη- είναι καλές καθότι υποβάλουν την ιδέα πως το εμβαδόν ενός σχήματος μπορεί εύκολα να βρεθεί αν το σχήμα χωριστεί σε τμήματα υπολογίσιμου εμβαδού)

Θέμα 5[2]

Δίδεται ένα δοχείο σε σχήμα κώνου με ύψος τριπλάσιο από την ακτίνα της βάσης και ένα άλλο κυλινδρικό με ακτίνα βάσης ίση με αυτήν του κώνου και ύψος ίσο με αυτή την ακτίνα. Ο πυθμένας του δοχείου αυτού είναι ένα ημισφαίριο. Αν γεμίσουμε το κωνικό δοχείο με νερό και το αδειάσουμε στο κυλινδρικό με την ημισφαίρια βάση, τι κλάσμα του κυλινδρικού μέρους του θα μείνει κενό;

Απάντηση





$$V_{κων} = \frac{1}{3}\pi\rho^2(3\rho) = \pi\rho^3$$

$$V_{δοχ} = V_{κυλ} + V_{ημισφ} = \pi\rho^2\rho + \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi\rho^3) = \frac{5}{3}\pi\rho^3$$

$$V_{δοχ} - V_{κων} = \frac{5}{3}\pi\rho^3 - \pi\rho^3 = \frac{2}{3}\pi\rho^3$$

Δηλαδή τα $\frac{2}{3}$ του κυλινδρικού μέρους του δοχείου θα μείνουν κενά