ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Εάν 0_1,0_2,0_3 είναι τα συμμετρικά του περικέντρου Ο του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς τις πλευρές ΒΓ,ΓΑ,ΑΒ αντίστοιχα δείξτε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο 0_1,0_2,0_3

β) Το Ο είναι ορθόκεντρο του τριγώνου 0_1,0_2,0_3.

γ) Οι ΑΟ, Β0_2, Γ0_3 διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο τις διχοτομεί,

2) Εάν ευθεία (ε) διέρχεται από το κέντρο βάρους Θ τριγώνου ΑΒΓ και αφήνει τα Β και Γ προς το αυτό μέρος, να δηχθεί ότι: ΑΑ'=ΒΒ'+ΓΓ', όπου ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' οι αποστάσεις των Α,Β,Γ από την (ε).

3) Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι β>γ. Εάν ΑΔ διάμεσος αυτού, δείξτε ότι: α) $\angle$ΑΔΓ > $\angle$[1]ΑΔΒ.

β) $\mu_\beta < \mu_\gamma$

4) Τετράπλευρου ΑΒΓΔ οι γωνίες Β και Δ είναι ορθές. Εάν οι ΑΒ, ΓΔ τέμνονται στο Ε και οι ΑΔ, ΒΓ στο Ζ , να δηχθεί ότι ή διαγώνιος ΑΓ είναι κάθετος επί την ΕΖ.

5) Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Εάν Ο ή τομή των διαγωνίων, να δηχθεί ότι τα ορθόκεντρο των τριγώνων ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ, ΟΑΔ είναι κορυφές παραλληλογράμμων.

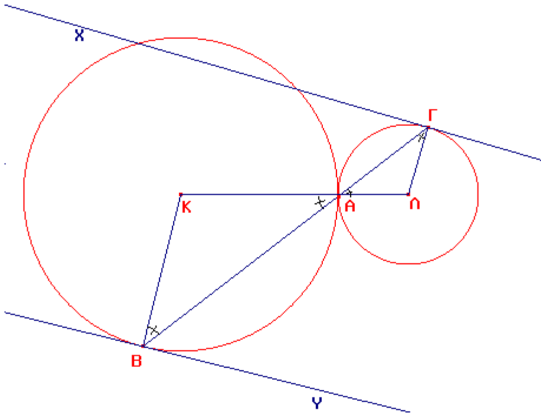
6) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, να δηχθεί ότι: $3\tau/2 < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 3\tau$

7) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε τα μέσα Κ,Λ των ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να δηχθεί ότι οι ΓΚ, ΓΛ τριχοτομούν την ΒΔ.

8) Θεωρούμε ημιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΚΒ και δύο σημεία Γ, Δ της διαμέτρου, συμμετρικά ως προς το κέντρο Κ. Από τα Γ, φέρνουμε δύο παράλληλες, πού τέμνουν την ημιπεριφέρεια στο Γ΄ και Δ΄. Δείξτε ότι $\angle$ΓΓ΄Δ'=90^o.

[1] Το σύμβολο $\angle$ σημαίνει γωνία. Δηλαδή $\angle$Α σημαίνει η γωνία Α, ενώ $\angle$ΑΒΓ σημαίνει η γωνία ΑΒΓ.

9) Δύο κύκλοι Κ,Λ εφάπτονται στο Α. Από το Α φέρνουμε ευθεία, πού τέμνει τούς κύκλους στα Β και Γ αντίστοιχα. Να δηχθεί ότι οι εφαπτόμενες των κύκλων στα Β και Γ είναι παράλληλες.



Κατασκευάζουμε το σχήμα σύμφωνα με την εκφώνηση. Πρέπει να δείξουμε ότι ΓΧ //ΒΥ. Επειδή οι ΓΧ και ΒΥ τέμνονται από την ΒΓ, αρκεί να αποδείξουμε ότι ∠ΑΒΥ=∠ΑΓΧ.

Απόδειξη: *Αφού ΓΧ και ΒΥ είναι εφαπτόμενες στου κύκλους Λ και Κ αντίστοιχα, άρα ΛΓ⊥ΓΧ και ΚΒ⊥ΒΥ, οπότε οι γωνίες ∠ΑΒΥ και ∠ΑΓΧ είναι συμπληρώματα των ∠ΚΒΑ και ∠ΑΓΛ αντίστοιχα. Αυτές όμως είναι ίσες μεταξύ τους, όπως φαίνεται από τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΚΑ και ΑΛΓ, καθότι ∠ΚΒΑ=∠ΓΑΛ ως κατακορυφήν ενώ ∠ΚΒΑ=ΚΑΒ και ∠ΓΑΛ=ΑΓΛ ως παρά την βάση ισοσκελών τριγώνων.*

10) Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ με ∠Α=∠Δ=90^o. Εάν ΒΓ=ΑΒ+ΓΔ, δείξτε ότι ό κύκλος διαμέτρου ΒΓ εφάπτεται της ΑΔ.

11) Δύο κύκλοι Κ,Λ, ακτίνων ρ και 3ρ αντίστοιχα , εφάπτονται εξωτερικά. Να υπολογισθεί ή γωνία των κοινών εξωτερικών εφαπτομένων τους.

12) Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (∠Α=90"). Με διάμετρο την ΑΒ γράφουμε περιφέρεια, πού τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Ζ. Να δηχθεί ότι ή εφαπτομένη της περιφέρειας στο Ζ διέρχεται από το μέσο της ΑΓ.

13) Δύο κύκλοι Κ και Λ εφάπτονται άλλου κύκλου Ο στά Α,Β αντίστοιχα. Εάν ή ΑΒ τέμνει τον Λ στο Γ, δείξτε ότι ΚΑ⫽ΛΓ.

14) Έστω κύκλος Ο και διάμετρος αυτού η ΒΓ . 'Από σημείο Α της προέκτασης της ΒΓ, φέρνουμε τέμνουσα ΑΔΕ, ώστε ΑΔ=R. Δείξτε ότι ΒΟΕ=3ΓΟΔ.

15) Έστω κύκλος Ο και τόξο αυτού ΒΓ=120^o. Εάν Μ τυχόν σημείο του τόξου, να

δηχθεί ότι οι διάμεσοι του τετραπλεύρου ΟΒΜΓ τέμνονται κάθετα.

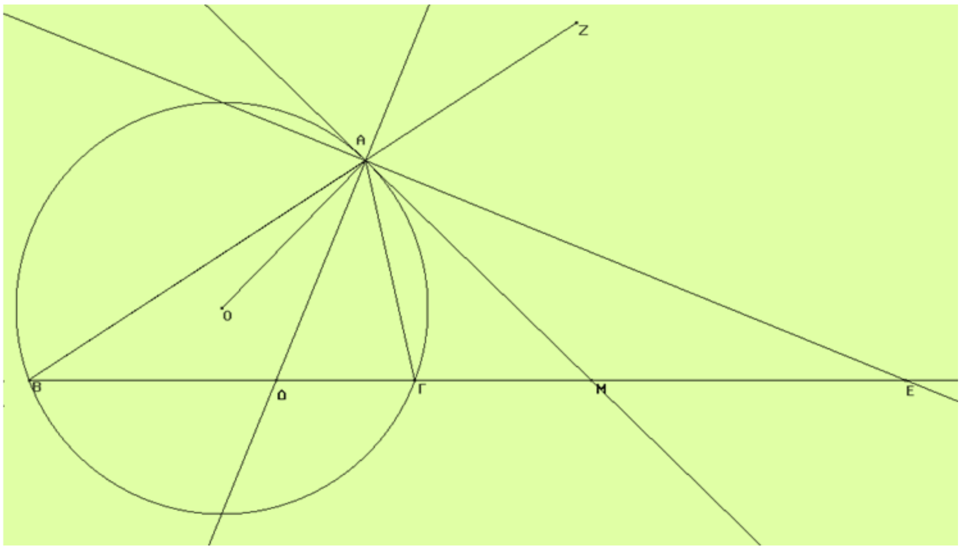
16) Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε αυτόν. Έστω Η το έκκεντρο του ΑΒΓ και Β΄, Γ' τα σημεία τομής του Ο με τις ΒΗ, ΓΗ αντίστοιχα. Δείξτε ότι ή Β΄Γ΄ είναι μεσοκάθετος στο ΑΗ.

17) Έστω κύκλος Ο και δύο τόξα ΑΒ=ΑΓ=120^{o}. Αν Δ, Ε τα μέ οα των τόξων αυτών, δείξτε ότι η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις ΑΒ, ΑΓ.

18) Έστω κύκλος Ο και χορδή ΑΒ αυτού με αντίστοιχο τόξο 120°. Οι εφαπτόμενες του Ο στα Α,Β τέμνονται στο Ρ. Αν Μ τυχόν σημείο του τόξου ΑΒ, και Α', Β οι τομές των ΑΜ, ΒΜ με τις ΒΡ, ΛΡ αντίστοιχα , να δηχθεί ότι ΑΑ'=ΒΒ'.

19) Θεωρούμε τρίγωνο, έστω το ΑΒΓ εγγεγραμμένο, σε κύκλο τον Ο, και έστω ΑΔ, ΑΕ οι διχοτόμοι της εσωτερικής και εξωτερικής γωνίας Α (τα Δ,Ε επί της ΒΓ). Να δηχθεί ότι ή εφαπτομένη του Ο στο Α διέρχεται από το μέσο της ΔΕ.

Η κατασκευή του σχήματος σύμφωνα με την εκφώνηση είναι:



Έστω Μ *το σημείο της* ΔΕ *από το οποίο περνά η εφαπτόμενη του* Ο *στο* Α. *Πρέπει να αποδείξουμε ότι το* Μ *είναι το μέσον της* ΔΕ.

Ανάλυση: Για να είναι το Μ μέσον της ΔΕ αρκεί η ΑΜ να είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΔΕ. Όμως το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο καθότι η ΑΔ και η ΑΕ είναι διχοτόμοι των εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών ΒΑΓ και ΓΑΖ. Αν λοιπόν η ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΔΑΕ, πρέπει να ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή πρέπει ΑΜ=ΜΔ, δηλαδή το τρίγωνο ΜΑΔ πρέπει να είναι ισοσκελές που σημαίνει ότι πρέπει ΜΔΑ=ΜΔΑ.

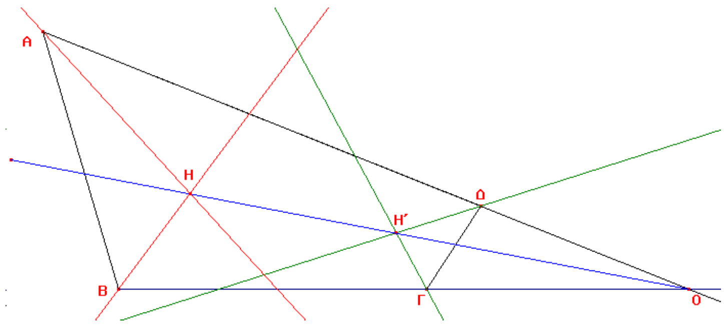
Όμως ΜΔΑ=Α/2+Β, ως εξωτερική του τριγώνου ΑΔΒ, και ΜΑΔ=Α/2+ΓΑΜ. Από τις δύο αυτές σχέσεις είναι φανερό ότι πρέπει να είναι ΓΑΜ=Β, το οποίο και συμβαίνει καθότι η ΓΑΜ είναι η γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη στο Α, την ΑΜ, και τη χορδή ΑΓ, ενώ η Β είναι η εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο που ορίζει η χορδή ΑΓ.

Απόδειξη: (Μορφοποιείται ακολουθώντας το μονοπάτι της ανάλυσης αντίστροφα. Εντοπίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ και δείχνουμε ότι ΑΜ=ΑΔ…)

20) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Β-Γ=90°. Εάν Η το ορθόκεντρο αυτού, να δηχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΒΓ είναι ίσα.

21) Αν Ο είναι το σημείο τομής δύο απέναντι πλευρών ενός τετράπλευρου, τότε τα σημεία τομής των διχοτόμων των γωνιών που πρόσκεινται στις δύο άλλες πλευρές του τετράπλευρου και το Ο, βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

Έστω τετράπλευρο το ΑΒΓΔ και έστω ότι οι απέναντι πλευρές ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Ο.



Έστω ακόμη ότι Η είναι η τομή των διχοτόμων των γωνιών Α και Β και Η΄ η τομή των διχοτόμων των γωνιών Γ και Δ. Πρέπει να δείξουμε ότι τα σημεία Ο, Η, Η' κείνται ευθείας.

22) Με πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ, ενός τριγώνου ΑΒΓ, κατασκευάζουμε έκτος αυτού τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, και ΑΓΖΗ. Δείξτε ότι οι ΒΖ και ΓΔ τέμνονται επί τού ύψους ΑΑ' του τριγώνου ΑΒΓ.

23) Σε τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΓ παραμένει σταθερή σε θέση και μέγεθος. Εάν το μήκος της μ_α παραμένει σταθερό να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου βάρους του τριγώνου.

24) Να βρεθεί ό γ.τ. των κέντρων των κύκλων πού αποκόπτουν ίσες χορδές, από τις πλευρές δεδομένης γωνίας ΧΟΥ.

25) Δίνεται ορθή γωνία ΧΟΥ. Ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=λ (λ· γνωστό ευθ. τμήμα) κινείται ώστε τα άκρα του να βρίσκονται επί των ΟΧ και ΟΥ αντίστοιχα. Να βρεθεί ό γ.τ. του μέσου Μ του ΑΒ.

26) Θεωρούμε δύο σταθερά σημεία Ο και Α. Να βρεθεί:

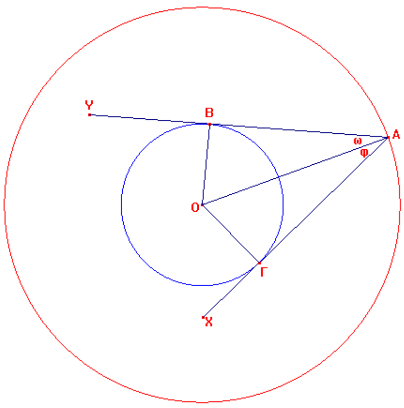
α) Ο γ.τ. των προβολών του Α στις ευθείες τις διερχόμενες από το Ο.

β) Ο γ.τ. των συμμετρικών του Α ως προς τις παραπάνω ευθείες.

27) Να βρεθεί ό γ.τ. του κέντρου βάρους ορθογωνίου τριγώνου με σταθερή υποτείνουσα ΒΓ.

28) Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και σταθερό σημείο Α. Να βρεθεί ό γ. τ. των μέσων των χορδών του κύκλου, πού διέρχονται από το σημείο Α.

29) Μια γωνία σταθερού μέτρου στρέφεται με τρόπο ώστε οι πλευρές της να εφάπτονται σε δοσμένο σταθερό κύκλο. Να βρεθεί ο γ.τ. της κορυφής της γωνίας.



Έστω ο δοσμένος κύκλος ο Ο και η (δοσμένη) γωνία σταθερού μέτρου η Α, της οποίας οι πλευρές ΑΥ και ΑΧ εφάπτονται του κύκλου Ο στα Β και Γ αντίστοιχα. Ζητείται ο γ.τ. της κορυφής Α όταν αυτή περιστρέφεται στον Ο, ενώ οι πλευρές της παραμένουν εφαπτόμενες στον Ο.

Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΟΓ είναι ίσα διότι έχουν ΟΒ=ΟΓ, ΟΑ κοινή, και ΑΒ=ΑΓ καθότι από σημείο εκτος κύκλου άγονται δύο ίσες μεταξύ τους εφαπτόμενες (πόρισμα 2.4.1). Άρα ∠φ=∠ω=∠Α/2. Επομένως το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ένα κατασκευάσιμο ορθογώνιο τρίγωνο αφού ∠ω είναι το μισό της σταθερής ∠Α και ΟΒ σταθερό ως ακτίνα του δοσμένου κύκλου. Οπότε και η ΟΑ είναι σταθερή, που σημαίνει ότι το Α απέχει σταθερή απόσταση από το σταθερό σημείο Ο. Κατά συνέπεια ο ζητούμενος γ.τ. είναι ένας κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ΟΑ.

30) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. 'Από τυχόν σημείο Ρ της ΒΓ φέρνουμε τις ΡΔ, ΡΕ

παράλληλες προς τις ΑΓ,ΑΒ. Να βρεθεί ό γ.Τ. του κέντρου Μ του παραλληλογράμμου ΑΔΡΕ.

31) Δίνεται κύκλος Ο και σημείο Α αυτού. φέρνουμε μια χορδή την ΑΒ μεταβλητή ως προς τη θέση, σταθερή ως προς το μήκος. Πάνω στην προέκτασή της παίρνουμε τμήμα ΒΜ=ΒΑ. Να βρεθεί ό γ.τ. του Μ.

32) Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,R), (Λ,Ρ). Θεωρούμε τις παράλληλες ακτίνες ΚΑ,ΛΒ. Να βρεθεί ό γ.Τ. του μέσου Μ της ΑΒ, όταν οι ΚΑ,ΛΒ είναι ομόρροπες και όταν είναι αντίρροπες;

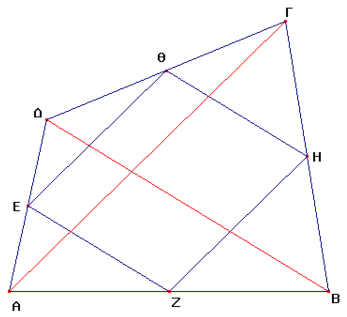
33) Δίνεται γωνία ΧΟΥ και δύο σημεία Σ,Ρ εντός αυτής. Να βρεθούν δύο σημεία Μ,Ν επί των ΟΧ,ΟΥ, ώστε ΣΜ+ΜΝ+ΝΡ=min

34) Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες Χ,Υ και σημείο Μ. Να βρεθούν τα σημεία Α,Β επί των Χ,Υ αντίστοιχα ώστε ΑΒ=λ και $\angle$ΑΜΒ=90^o .

35) Δίνεται γωνία ΧΟΥ και επί της ΟΧ σταθερό σημείο Ρ. Να βρεθεί επί της ΟΧ σημείο Μ, που να απέχει ίσα από το Ρ και την ΟΥ.

36) Δίνεται κύκλος Ο και δύο σημεία Α,Β. Να βρεθεί επί του (Ο) σημείο Μ, ώστε, αν Γ,Δ οι τομές των ΜΑ, ΜΒ με τον (Ο), να είναι ΓΔ=λ.

37) Δίδεται ένα τυχαίο τετράπλευρο. Δείξτε ότι το τετράπλευρο που έχει ως κορυφές τα μέσα των πλευρών του αρχικού τετραπλεύρου είναι παραλληλόγραμμο και είναι ίσο σε εμβαδό με το μισό του αρχικού. (πόρισμα 2.7.1)



Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και το ΕΖΗΘ με κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ.

Φέρνουμε τις διαγωνίους ΑΓ και ΒΔ του αρχικού.

i) *Στο τρίγωνο τότε ΑΓΔ η ΕΔ ενώνει τα μέσα των πλευρών του άρα είναι ΕΘ=//ΑΓ/2. Όμοια από το ΑΒΓ ΗΖ=//ΑΓ/2. Οπότε ΕΘ=//ΗΖ, άρα το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.*

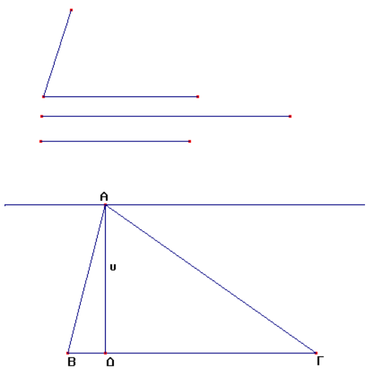
ii) Για το τρίγωνο ΕΔΘ ισχύει ότι (ΕΘΔ)=*$\frac{1}{4}$*(ΑΓΔ), όμοια (ΘΗΓ)=* $\frac{1}{4}$*(ΓΔΒ) και*

(ΗΖΒ)= $\frac{1}{4}$ *(ΑΓΒ) και (ΑΖΕ)=* $\frac{1}{4}$ *(ΑΒΔ)*

Δηλαδή (ΕΖΗΘ)= (ΑΒΓΔ)-[(ΕΔΘ)+(ΓΘΗ)+(ΖΒΗ)+ΑΖΕ)], οπότε μα αντικατάσταση και πράξεις έχουμε το ζητούμενο: (ΕΖΗΘ)= $\frac{1}{2}$ *(ΑΒΓΔ)*

*Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 2.7.1.

38) Να κατασκευαστεί τρίγωνο από τη βάση του α, τη προσκείμενη σ' αυτήν γωνία Β, και το ύψος $υ_α$.



Ανάλυση: Αφού η βάση α είναι δεδομένη αρκεί να προσδιοριστεί η κορυφή Α. Αφού το ύψος είναι δεδομένο η Α βρίσκεται σε μια ευθεία παράλληλη προς τη βάση και απέχουσα κατά το δεδομένο ύψος από αυτήν. Επίσης βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία η οποία σχηματίζει δεδομένη γωνία Β με τη βάση α.

Κατασκευή: (προφανής από την ανάλυση)